Lösung der Aufgabe 1

a) $f'(x) = \frac{-a\cdot x^4 - (1+3a)\cdot x^3 + 1}{(x^2+1)^2}$; $f'(1) = \frac{-a-1-3a+1}{2^2} = -a \quad = \quad 2$ für <u>a = -2</u>

b) $f(x) = \frac{x-x^3}{x^2+1} = x\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2} = x\cdot\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{1+x^2}$

$D = \mathbb{R}$

Nullstellen f(x) = 0 für x = 0, x = 1 und x = -1

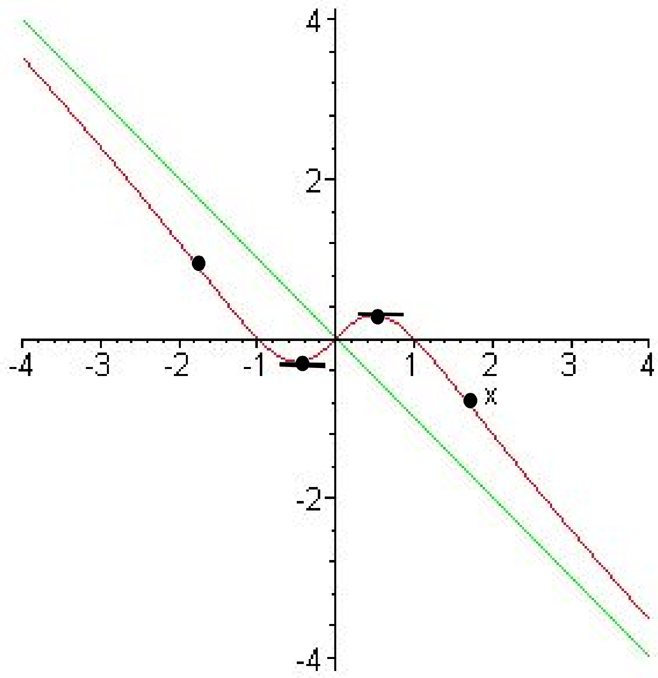
Wegen x^1 als Faktor einer geraden Funktion mit lauter quadratischen Termen in x ist die Funktion f ungerade, d.h. <u>punktsymmetrisch bezüglich dem Ursprung</u> : f(x) = - f(-x).

Die Polynomdivison liefert $(-x^3 + x) : (x^2 + 1) = -x + \frac{2x}{x^2+1}$; Asymptote ist demnach die Gerade mit der Gleichung <u>y = -x</u> , weil der zweite Summand für grosse |x| verschwindet.

Extremalstellen : $f'(x) = -\frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$; f'(x) = 0, wenn $x^4+4x^2-1 = 0$ (biquadratische Gleichung)

Lösungen sind $x = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2} = \pm 0{,}4858....$ Aus Gründen des asymptotischen Verhaltens und aus Symmetriegründen ist der negative Wert eine Minimalstelle, der positive Wert eine Maximalstelle : Minimum(-0,4858.../-0,3002...); Maximum(0,4858.../0,3002...).

Wendepunkte : $f''(x) = 4x\cdot\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}$; es ist f''(x) = 0 für x = 0 und für $x = \pm\sqrt{3}$. Die Wendepunkte sind $(\mp\sqrt{3}\,/\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.



c) Im Punkt mit dem grössten Abstand ist die Steigung des Graphen -1 (Parallele zur Asymptoten).

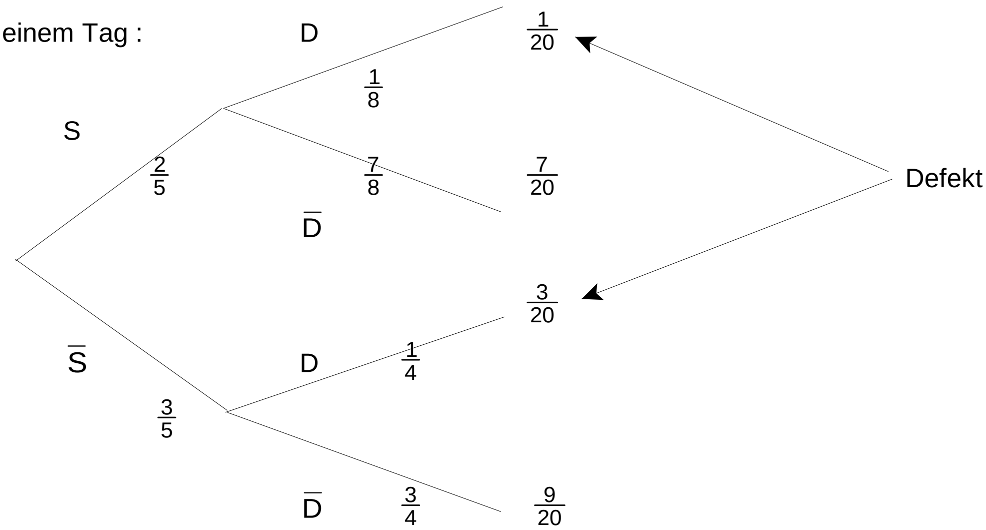
Also ist $f'(x) = -\frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2} = -1$. Man erhält $x^4+4x^2-1 = (x^2+1)^2$ und daraus die quadratische Gleichung $x^2 = 1$.Die Punkte des Graphen, die den grössten Abstand haben, sind demnach (-1/0) und (1/0).

Lösung der Aufgabe 2

P("Schönes Wetter") = P(S) = $\frac{2}{5}$; P("schlechtes Wetter") = P($\overline{S}$) = $\frac{3}{5}$

P("Defekt") = P(D); P(D|S) = $\frac{1}{8}$;P($\overline{D}$ |S) = $\frac{7}{8}$; P($\overline{D}$ |S) = $\frac{3}{4}$; P(D|$\overline{S}$) = $\frac{1}{4}$;

an einem Tag :



a) P(D) = P(D∩S ∪ D∩$\overline{S}$) = P(S)·P(D|S) + P($\overline{S}$)·P(D|$\overline{S}$) = $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

b) P(höchstens ein Defekt pro Woche) = P(0 D ∪ 1 D) = P(0 D) + P(1 D)

$$P(0\ D) = \binom{5}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125};\qquad P(1\ D) = \binom{5}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^4 = \frac{1280}{3125}$$

P(höchstens ein Defekt pro Woche) = $\frac{1024}{3125}+\frac{1280}{3125}=\frac{2304}{3525}$

c) P($\overline{D}$ ∩S) = P(S) · P($\overline{D}$ |S) = $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{20}$; P(5 mal kein Defekt bei schönem Wetter) = $\left(\frac{7}{20}\right)^5$

d) P(D∩$\overline{S}$) = P(D)·P($\overline{S}$ |D), also P($\overline{S}$ |D) = $\dfrac{P(D\cap\overline{S})}{P(D)}=\dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}=\frac{3}{4}$

e) $P(2\ D) = \binom{5}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^3 = \frac{640}{3125}$

$P(3\ D) = \binom{5}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = \frac{160}{3125}$

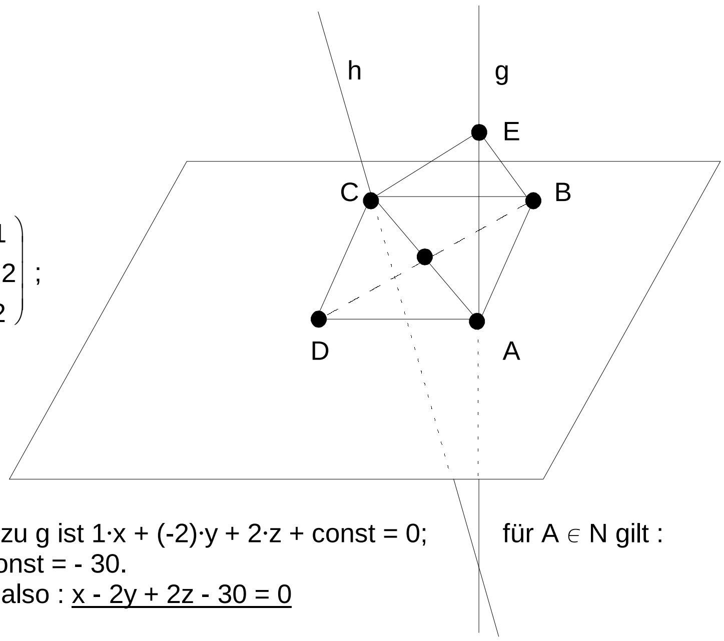
$P(4\ D) = \binom{5}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^1 = \frac{20}{3125}$

$P(5\ D) = \binom{5}{5}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^5\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{3125}$

X : Beitrag für die Klassenkasse, Werte der Zufallsvariablen sind 1, 3, 6, 10 und 15

μ = P(X) = 1· P(1 D) + 3 · P(2 D) + 6 · P(3 D) + 10· P(4 D) + 5· P(5 D) = $\frac{4375}{3125}=\frac{7}{5}$ = 1,40

Lösung der Aufgabe 3



a) Gleichung von g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

die Gleichung der Normalebene N zu g ist $1 \cdot x + (-2) \cdot y + 2 \cdot z + \text{const} = 0$; für $A \in N$ gilt :
$16 + (-2) \cdot (-10) + 2 \cdot (-3) + \text{const} = 0$, const = - 30.
Die Gleichung der Ebene N lautet also : $\underline{x - 2y + 2z - 30 = 0}$

b) Das kleinste Quadrat ergibt sich, wenn der Durchstosspunkt von h mit N als Ecke C gewählt wird; AC ist dann Diagonale des Quadrats.
Die Gerade h durchstösst die Ebene N : $(1+t) - 2 \cdot (2) + 2 \cdot (3-2t) - 30 = 0$ ergibt $t = -9$ und den Durchstosspunkt C(-8/2/21). Die Diagonale hat die Länge $|\vec{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -24 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{576 + 144 + 576} = 36$, die Quadratseite hat demnach die Länge $s = \dfrac{36}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}$. Der Mittelpunkt des Quadrats ist M(4/-4/9).

"Geometrische" Lösung für die Koordinaten des Punktes B (und D) :

Der Vektor $\vec{MB}$ ste$\overline{\text{S}}$ht senkrecht zur Ebene, die durch g und einen zum Vektor $\vec{AC}$ kollinearen aufgespannt wird, ist also Normalenvektor dieser Ebene mit der Länge 18. Die Ebene hat die Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $2x + 2y + z - 9 = 0$. Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Länge 3 und ist kollinear zum Vektor $\vec{MB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit der Länge 18. Man erhält die Ortsvektoren von B$\overline{\text{D}}$ durch Addition bzw. Subtraktion dieses Vektors und des Ortsvektors von M :

B(16 / 8 / 15) und D(-8 / -16 / 3).

"Algebraische" Lösung für die Koordinaten des Punktes B (und D) :

$B(x/y/z) \in N$: $x - 2y + 2z - 30 = 0$

$|\vec{AB}| = s$: $(x-16)^2 + (y+10)^2 + (z+3)^2 = 648$

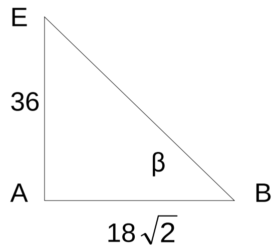
$|\vec{CB}| = s$: $(x+8)^2 + (y-2)^2 + (z-21)^2 = 648$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert ebenfalls die oben gefundenen Koordinaten des Punktes B. Für den Punkt D muss ein entsprechendes Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden.

---

c) Der Vektor von A nach E ist kollinear zum Richtungsvektor von g und muss die Länge 36 haben : $\left| t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right| = 36$: $9t^2 = 1296$, $t = \pm 12$. Man erhält E [eine Lösung] : $\vec{r}_E = \vec{r}_A + 12\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\14\\9\end{pmatrix}$, also den Punkt E(40 / 14 / 9) [die zweite Lösung ist F(-8 / -34 / -15)]

d) BE steht senkrecht auf der Spur (BC) der Ebene BCE; der gesuchte Winkel β liegt im Dreieck ABE bei B : $\tan\beta = \frac{36}{18\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. $\beta = 54{,}7...^\circ$



Lösung der Aufgabe 4

Kreis und Parabel liegen symmetrisch zur x-Achse. Gleichung des oberen Halbkreises $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Die y-Koordinate des Berührpunkts ist $f(r\frac{r}{2}) = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Die Steigung der Tangente an den Kreis ist

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, im Berührpunkt $f'(\frac{r}{2}) = -\frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

a) Die obere Hälfte der Parabel hat die Gleichung $g(x) = c\cdot\sqrt{d - x}$, im Berührpunkt ist der y-Wert $g(\frac{r}{2}) = c\cdot\sqrt{d - \frac{r}{2}}$. Die Steigung der Parabel beträgt $g'(x) = \frac{c}{2\sqrt{d - x}}\cdot(-1)$ und im Berührpunkt

$g'(\frac{r}{2}) = -\frac{c}{2\sqrt{d - \frac{r}{2}}}$.

Man erhält die beiden Gleichungen für die y-Koordinaten und die Steigung :

$\frac{r}{2}\sqrt{3} = c\sqrt{d - \frac{r}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2\sqrt{d - \frac{r}{2}}}$

Aus der 2.Gleichung c isolieren und in der 1.Gleichung einsetzen: $\frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{d - \frac{r}{2}}}{\sqrt{3}}\sqrt{d - \frac{r}{2}}$ ergibt

$d = \frac{5}{4}r$ und $c = \sqrt{r}$. Die Gleichung der Parabel lautet $y = \pm\sqrt{r}\sqrt{\frac{5}{4}r - x}$; Schnittpunkt mit der x-Achse ist bei $x = \frac{5}{4}r$

b) $V_K = \pi\int_{-r}^{\frac{r}{2}}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{\frac{r}{2}} = \frac{9}{8}r^3\pi$

c) $V_P = \pi r\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{5}{4}r}\left(\sqrt{\frac{5}{4}r - x}\right)^2 dx = \pi r\left[\frac{5}{4}rx - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{r}{2}}^{\frac{5}{4}r} = \frac{9}{32}r^3\pi$

d) Länge = $r + \frac{5}{4}r = \frac{9}{4}r = 6$; dies ergibt den Radius $r = \frac{8}{3}$ und die Volumina $V_K = \frac{64}{3}\pi$ und $V_P = \frac{16}{3}\pi$.

Lösung der Aufgabe 5

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$ Faktorisieren : $(2\cos x - 1)\cdot(\cos x + 1) > 0$

Beide Faktoren positiv : $\cos x > \frac{1}{2}$ und $\cos x > -1$; dies trifft zu (siehe Cosinuskurve) für $0° < x < \frac{\pi}{3}$ und $x > \frac{5\pi}{3}$.

BeideFaktoren negativ : $\cos x < \frac{1}{2}$ und $\cos x < -1$ ergeben keine Lösung

b) $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) + 2\cdot\int\frac{1}{1+x^2}dx$

mit $f(x) = \ln(1+x^2)$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot(2x)$

und $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ $g(x) = -\frac{1}{x}$

Das letzte Integral ist bekannt (Formelsammlung !) als arctan x.

c) 1.Gleichung : $3^2 \cdot 3^{x-3} = 3^{2\cdot(y-1)}$ vereinfacht $3^x = 3^{2y-2}$ oder $x = 2y - 2$
2.Gleichung : $2^{2\cdot(x-3)} = 2^2 \cdot 2^{y-3}$ vereinfacht $2^{2x-6} = 2^{y-1}$ oder $2x - 3 = y - 1$
x in die 2.Gleichung einsetzen : $2\cdot(y-2) - 6 = y - 1$. Man erhält $y = 3$, $x = 4$.