KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

Maturitätsprüfungen 2001
(Bh, Sw)

M a t h e m a t i k   Typus C

Bemerkungen :

Zeit : Drei Stunden
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.
Resultate sind exakt anzugeben, wenn in der Aufgabenstellung nichts anderes verlangt ist.

1. Für jede positive reelle Zahl $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch die Funktionsgleichung $y = f_a(x) = a \cdot (2 - \ln(ax)) \cdot \ln(ax)$.
   a) Untersuche die Funktion auf Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse und bestimme Extrem- und Wendepunkte (ohne 3.Ableitung).
   b) Skizziere die Graphen der Funktionen f_1 und f_3 im Intervall [0,8] im gleichen Koordinatensystem.
   c) Die lokalen Extrempunkte der Graphen aller Funktionen f_a liegen auf einer Kurve. Finde die Gleichung dieser Kurve.
   d) Weise nach, dass $F_a(x) = - ax \cdot(\ln(ax) - 2)^2$ eine Stammfunktion von f_a ist.
   e) Der Graph von f_a und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Bestimme den Flächeninhalt und zeige, dass der Inhalt dieser Fläche von a unabhängig ist.

2. Kurzaufgaben :
   a) Bestimme das Integral $\int_1^4 \sqrt{\sqrt{x} - 1}\, dx$.
   b) Zwei Kurvenscharen $H_a : y = \frac{1}{x + a}$ mit und $K_a : y = \sqrt[3]{3x + 3a}$ sind gegeben, wobei $x + a > 0$ ist.
   Bestimme den geometrischen Ort aller Schnittpunkte von Kurven H_a und K_a mit gleichem Parameter a und beweise, dass sich diese Kurven rechtwinklig schneiden.
   c) In welches Gebiet der Gaussebene wird die Halbebene $\mathrm{Re}(z) = x \geq \frac{1}{2}$ abgebildet durch die komplexe Abbildung $z \mapsto w = \frac{z}{z - 2i}$?

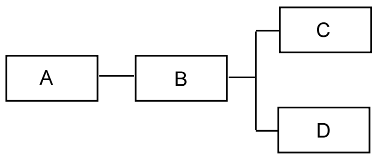
3. Durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung α: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der xy-Ebene gegeben.
   a) Berechne $A*A$, A^{-1} und $\mathrm{Det}(A)$ und bestimme die Fixgeraden der Abbildung α. Um welchen Abbildungstyp handelt es sich ?
   b) g_1 ist die Gerade durch den Ursprung mit der Steigung 2 und g_2 die dazu senkrechte Ursprungsgerade. Bestimme die Bilder dieser beiden Geraden.
   c) α bildet den Kreis K: $x^2 + y^2 = 45$ auf eine Ellipse ab. Skizziere Urbild und Bild.

4. Gegeben sind die Punkte A(2|5|-1), B(6|3|3), eine Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und

   die Kugel K mit Mittelpunkt O(0|0|0) und Radius R = 3.

   a) Suche einen Punkt C auf g, der die Basis AB zu einem gleichschenkligen Dreieck ergänzt.
   b) Bestimme den Punkt D auf g, der zusammen mit den Punkten A und B ein Dreieck mit minimaler Fläche bildet.
   c) Ermittle jenen Punkt S auf der Kugel, der mit dem Dreieck ABC eine schiefe Pyramide mit minimalem Volumen bildet.

5. Ein Unternehmen stellt Musikanlagen her, die aus vier Teilen A (Netzteil), B (Verstärker), C (Tuner) und D (CD-Player) bestehen; jeder Teil in der Anlage kann unabhängig von den andern ausfallen. Die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls eines Teils innerhalb einer festgelegten Zeitdauer ist für alle vier Teile gleich und beträgt p.



   a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse E und F :
      Ereignis E: innerhalb der Zeitdauer fällt Teil C oder Teil D aus.
      Ereignis F: innerhalb der Zeitdauer fällt mindestens einer der vier Teile aus.
   b) Die Zufallsgrösse X beschreibt die Anzahl der innerhalb der Zeitdauer ausfallenden Teile. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgrösse X.
   c) Die Anlagen werden im Unternehmen nach ihrer Fertigung zwei verschiedenen Prüfungen unterzogen, deren Ergebnisse voneinander unabhängig sind. Jede gefertigte Anlage besteht die erste Prüfung mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 und die zweite mit der Wahrscheinlichkeit 0,85. Die Zufallsgrösse Z bezeichne die Anzahl der Prüfungen, die eine Anlage besteht. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Anlage keine, eine oder beide Prüfungen besteht.

   Der Ausfall von Teil A und von Teil B führen zum Ausfall der ganzen Anlage, desgleichen der gleichzeitige Ausfall der beiden Teile C und D. In allen andern Fällen gilt die Anlage als *einsatzfähig*, also auch dann, wenn einer der Teile C oder D ausfällt.

   d) Berechne die Einsatzfähigkeit der gesamten Anlage, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die ganze Anlage während der Zeitdauer funktioniert.
   e) Die Wahrscheinlichkeit für die Funktionstüchtigkeit eines Teils beträgt 1-p. Durch Veränderungen bei der Herstellung der Teile soll deren Funktionstüchtigkeit und damit die Einsatzfähigkeit der ganzen Anlage erhöht werden. Für die gesamte Anlage wird eine Einsatzfähigkeit grösser als 95 % angestrebt. Berechne die dazu notwendige Wahrscheinlichkeit für die Funktionstüchtigkeit der einzelnen Teile. (Lösung der Gleichung mit TR, numerisch oder graphisch, Angabe der Lösung auf 2 Stellen nach dem Komma genau)