

M a t h e m a t i k

Grundlagenfach

Bemerkungen :

Zeit : Drei Stunden

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{6(x-2)}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrempunkte und Asymptoten des Graphen der Funktion f . Die zweite Ableitungsfunktion von f lautet $f''(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2x^3 - 12x^2 + 24x}{(x-2)^3}$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$ anhand der in a) berechneten Punkte und Asymptoten möglichst genau.

c) Die Tangente t_N und die Normale n_N an der negativen Nullstelle N von $f(x)$ bilden mit der y -Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

2. Die Punkte $A(3/3/-2)$, $B(5/7/2)$ und $C(3/8/4)$ bestimmen eine Ebene E , gegeben ist ausserdem der Punkt $D(1/4/0)$.

a) Finden Sie eine Parameter- und die Koordinatengleichung der Ebene E und die Geradengleichung der Geraden (CD) .

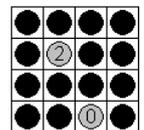
b) Zeigen Sie, dass D ebenfalls in der Ebene E liegt und dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist; bestimmen Sie den Winkel α im Parallelogramm zwischen den Seitenvektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} .

c) Ein Punkt P bewegt sich auf der Geraden (CD) . Bestimmen Sie alle Punkte auf (CD) , für welche das Dreieck ABP rechtwinklig ist mit rechtem Winkel bei P .

d) In der Ebene E wird von der Ecke D aus senkrecht zur Seite AB die Höhe h_{AB} auf die Seite AB errichtet. Berechnen Sie trigonometrisch die Länge dieser Höhe h_{AB} und den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

3. Eine Kurve hat die Gleichung $f(x) = a\sqrt{x} - bx$ ($a, b > 0$). Rotiert der Teil der Kurve, der zwischen den Nullstellen liegt, um die x-Achse, so entsteht ein Stromlinienkörper.
- Zeichnen Sie den Graph für $a = 5$ und $b = 0.5$.
Wie lang ist der Körper? Wo ist der Durchmesser am grössten und wie gross ist er?
Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Kurve bei den Nullstellen?
 - Welches Volumen hat der Stromlinienkörper von Aufgabe a)?
 - Bestimmen Sie a und b so, dass der Körper die Länge 81 und den Durchmesser 27 hat.
 - Zeigen Sie, dass aus $b = \frac{2}{3}$ folgt, dass der Durchmesser des Körpers $\frac{1}{3}$ seiner Länge beträgt (unabhängig von a).

4. Bei einer Lotterie werden Rubbelkarten verkauft. Jede Karte enthält 16 Felder, in denen - zufällig angeordnet - eine der Zahlen 0, 1, 2 oder 3 steht. Die 0 kommt immer siebenmal vor, die 1 viermal, die 2 dreimal und die Zahl 3 zweimal. Jeder Kartenkäufer muss zwei beliebige der 16 Felder aufrubbeln.



- Berechnen sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :
A : Beide aufgerubbelten Felder enthalten die Zahl 1.
B : Mindestens eines der beiden Felder enthält eine 0.
 - Eine Karte, bei der die beiden aufgerubbelten Felder keine 0 enthalten, ist eine Gewinnkarte. Adam kauft zehn Rubbelkarten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er dabei genau vier Gewinne?
 - Werden auf einer Karte beide Dreier aufgerubbelt, gewinnt diese Karte 30 Franken. Wieviele Karten muss Beda kaufen und aufrubbeln, damit er mit mindestens 50%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal 30 Franken gewinnt.
 - Enthält die aufgerubbelte Karte mindestens eine 0, gewinnt sie gar nichts. Rubbelt der Käufer zwei verschiedene Zahlen grösser als 0 auf, gewinnt er 1 Franken. Rubbelt er zweimal 1 auf, gewinnt er 5 Franken. Bei zweimal 2 gewinnt die Karte 10 Franken und bei zweimal 3 gewinnt sie 30 Franken.
Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn in Franken mit einer Rubbelkarte. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechnen Sie den Erwartungswert von X .
5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben
- Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das von den Graphen der beiden Funktionen $f(x) = x^2 \cdot e^x$ und $g(x) = 2e^x$ vollständig eingeschlossen wird.
 - Eine Ebene E schneidet die drei Koordinatenachsen in den Punkten $A(1/0/0)$, $B(0/3/0)$ und $C(0/0/2)$. Eine Gerade g führt durch die Punkte $P(-7/p/-1)$ und $Q(11/7/q)$. Finden Sie p und q so, dass die Gerade g senkrecht zur Ebene E steht und bestimmen Sie die Abstände der Punkte P und Q von der Ebene E .