

M a t h e m a t i k

Grundlagenfach

Bemerkungen :

Zeit : Drei Stunden

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{6(x-2)}$ .

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrempunkte und Asymptoten des Graphen der Funktion  $f$ . Die zweite Ableitungsfunktion von  $f$  lautet  $f''(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2x^3 - 12x^2 + 24x}{(x-2)^3}$ .

b) Zeichnen Sie den Graphen von  $f(x)$  anhand der in a) berechneten Punkte und Asymptoten möglichst genau.

c) Die Tangente  $t_N$  und die Normale  $n_N$  an der negativen Nullstelle  $N$  von  $f(x)$  bilden mit der  $y$ -Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

2. Die Punkte  $A(3/3/-2)$ ,  $B(5/7/2)$  und  $C(3/8/4)$  bestimmen eine Ebene  $E$ , gegeben ist ausserdem der Punkt  $D(1/4/0)$ .

a) Finden Sie eine Parameter- und die Koordinatengleichung der Ebene  $E$  und die Geradengleichung der Geraden  $(CD)$ .

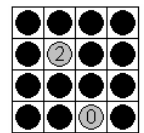
b) Zeigen Sie, dass  $D$  ebenfalls in der Ebene  $E$  liegt und dass das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm ist; bestimmen Sie den Winkel  $\alpha$  im Parallelogramm zwischen den Seitenvektoren  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AD}$ .

c) Ein Punkt  $P$  bewegt sich auf der Geraden  $(CD)$ . Bestimmen Sie alle Punkte auf  $(CD)$ , für welche das Dreieck  $ABP$  rechtwinklig ist mit rechtem Winkel bei  $P$ .

d) In der Ebene  $E$  wird von der Ecke  $D$  aus senkrecht zur Seite  $AB$  die Höhe  $h_{AB}$  auf die Seite  $AB$  errichtet. Berechnen Sie trigonometrisch die Länge dieser Höhe  $h_{AB}$  und den Flächeninhalt des Parallelogramms  $ABCD$ .

3. Eine Kurve hat die Gleichung  $f(x) = a\sqrt{x} - bx$  ( $a, b > 0$ ). Rotiert der Teil der Kurve, der zwischen den Nullstellen liegt, um die x-Achse, so entsteht ein Stromlinienkörper.
- Zeichnen Sie den Graph für  $a = 5$  und  $b = 0.5$ .  
Wie lang ist der Körper? Wo ist der Durchmesser am grössten und wie gross ist er?  
Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Kurve bei den Nullstellen?
  - Welches Volumen hat der Stromlinienkörper von Aufgabe a)?
  - Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass der Körper die Länge 81 und den Durchmesser 27 hat.
  - Zeigen Sie, dass aus  $b = \frac{2}{3}$  folgt, dass der Durchmesser des Körpers  $\frac{1}{3}$  seiner Länge beträgt (unabhängig von  $a$ ).

4. Bei einer Lotterie werden Rubbelkarten verkauft. Jede Karte enthält 16 Felder, in denen - zufällig angeordnet - eine der Zahlen 0, 1, 2 oder 3 steht. Die 0 kommt immer siebenmal vor, die 1 viermal, die 2 dreimal und die Zahl 3 zweimal. Jeder Kartenkäufer muss zwei beliebige der 16 Felder aufrubbeln.



- Berechnen sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :  
A : Beide aufgerubbelten Felder enthalten die Zahl 1.  
B : Mindestens eines der beiden Felder enthält eine 0.
  - Eine Karte, bei der die beiden aufgerubbelten Felder keine 0 enthalten, ist eine Gewinnkarte. Adam kauft zehn Rubbelkarten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er dabei genau vier Gewinne?
  - Werden auf einer Karte beide Dreier aufgerubbelt, gewinnt diese Karte 30 Franken. Wieviele Karten muss Beda kaufen und aufrubbeln, damit er mit mindestens 50%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal 30 Franken gewinnt.
  - Enthält die aufgerubbelte Karte mindestens eine 0, gewinnt sie gar nichts. Rubbelt der Käufer zwei verschiedene Zahlen grösser als 0 auf, gewinnt er 1 Franken. Rubbelt er zweimal 1 auf, gewinnt er 5 Franken. Bei zweimal 2 gewinnt die Karte 10 Franken und bei zweimal 3 gewinnt sie 30 Franken.  
Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt den Gewinn in Franken mit einer Rubbelkarte. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  und berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .
5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben
- Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das von den Graphen der beiden Funktionen  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  und  $g(x) = 2e^x$  vollständig eingeschlossen wird.
  - Eine Ebene  $E$  schneidet die drei Koordinatenachsen in den Punkten  $A(1/0/0)$ ,  $B(0/3/0)$  und  $C(0/0/2)$ . Eine Gerade  $g$  führt durch die Punkte  $P(-7/p/-1)$  und  $Q(11/7/q)$ . Finden Sie  $p$  und  $q$  so, dass die Gerade  $g$  senkrecht zur Ebene  $E$  steht und bestimmen Sie die Abstände der Punkte  $P$  und  $Q$  von der Ebene  $E$ .