

Lösung der Aufgabe 1:

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{6(x-2)} = \frac{(x+6) \cdot (x-3)^2}{6(x-2)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3x^2 - 27) \cdot (x-2) - (x^3 - 27x + 54) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{x-3}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} x \cdot \frac{x^3 - 6x + 12}{(x-2)^3} \quad (\text{vorgegeben})$$

Nullstellen : $x^3 - 27x + 54 = 0$. Durch Probieren findet man die Nullstelle $x = 3$.

Polynomdivision : $(x^3 - 27x + 54) : (x-3) = x^2 + 3x - 18 = (x-3) \cdot (x+6)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ \underline{3x^2 - 27x + 54} \\ 3x^2 - 9x \\ \underline{-18x + 54} \\ -18x + 54 \end{array}$$

$x_1 = 3$ ist doppelte Nullstelle, $x_2 = -6$ einfache Nullstelle des Zählers

Extrema : $f'(x) = 0$

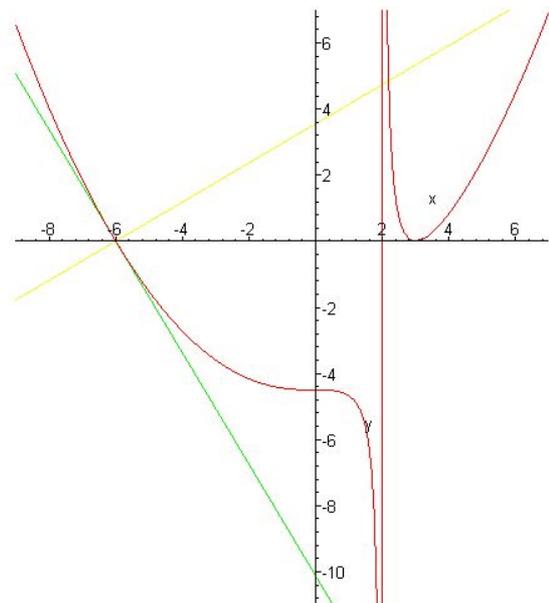
$2x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot (x-3) = 0$ horizontale Tangenten bei $x_3 = 0$ und $x_4 = 3$

$f''(0) = 0$ keine Aussage möglich $P(0|-4.5)$ ist Punkt mit horizontaler Tangente

$f''(3) = 3 > 0$, $x_4 = 3$ ist Minimalstelle $T(3|0)$ ist Tiefpunkt

Asymptoten : vertikale Asymptote bei $x = 2$, keine horizontale oder schiefe Asymptote, da der Grad des Nenner $>$ Grad des Zählers $+ 1$.

Pol bei $x = 2$



$$c) M(-6|0) \quad m = f'(-6) = -\frac{27}{16}$$

$$\text{Ansatz für die Tangente } t: y = -\frac{27}{16} \cdot x + q_t$$

$$N(-6|0) \in t: \quad 0 = -\frac{27}{16} \cdot (-6) + q_t$$

$$\Rightarrow q_t = -\frac{81}{8}$$

$$\text{Tangentengleichung} \quad y = -\frac{27}{16} \cdot x - \frac{81}{8}$$

$$\text{Ansatz für die Normale } n: y = \frac{16}{27} \cdot x + q_n$$

$$N(-6|0) \in n: \quad 0 = \frac{16}{27} \cdot (-6) + q_n \quad \Rightarrow q_n = \frac{32}{9}$$

$$\text{Gleichung der Normalen} \quad y = \frac{16}{27} \cdot x + \frac{32}{9}$$

Flächeninhalt des Dreiecks :

$$F = \frac{1}{2} \cdot (q_n - q_t) \cdot |x_N| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{32}{9} + \frac{81}{8} \right) \cdot 6 = \frac{985}{24} = 41.04\dots$$

Lösung der Aufgabe 2 :

a) Parametergleichung der Ebene E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

[Es ist $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, also lautet die Koordinatengleichung der Ebene E :

$2x - 6y + 5z + \text{const.} = 0$; durch Einsetzen von A erhält man $\text{const.} = 22$, also die Gleichung $2x - 6y + 5z + 22 = 0$]

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{DA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

[D liegt auf E : wähle $u = -2, v = 1$ oder : Einsetzen in die Koordinatengleichung : $2 \cdot 1 - 6 \cdot 4 + 5 \cdot 0 - 22 = 0$]

Das Viereck ist ein Parallelogramm, $\vec{AB} = -\vec{CD}$ und $\vec{BC} = -\vec{DA}$, also ist auch D in der Ebene E .

Winkel: $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos \alpha$; $\cos \alpha = \frac{4}{9} \approx 0.4$, $\alpha = 63.6122000\dots$

c) P liegt auf der Geraden (CD) mit der Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Es muss gelten :

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0 : \vec{AP} \cdot \vec{BP} = \begin{pmatrix} -2+t \\ 1+2t \\ 2+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4+t \\ -3+2t \\ -2+2t \end{pmatrix} = 8-6t+t^2-3-4t+4t^2-4+4t^2 = 9t^2-10t+1 = 0$$

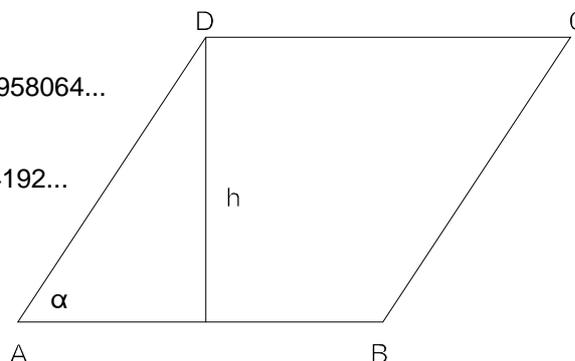
Man erhält die Werte $t_1 = 1$ und $t_2 = 1/9$.

Die Punkte $P_1(2/6/2)$ und $P_2(10/9 / 38/9 / 2/9)$ bilden mit den Punkten A und B ein rechtwinkliges Dreieck.

d) $h = |\vec{AD}| \cdot \sin \alpha = 3 \cdot 0.8958064\dots$
 $= 2.6874192\dots$

$F = |\vec{AB}| \cdot h = 6 \cdot 2.6874192\dots$

$F = 16.1245154\dots$



[Einfachere Lösung über das Vektorprodukt :

$$F = \left| \vec{AB} \times \vec{AD} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 10^2} = \sqrt{260} \quad]$$

Lösung der Aufgabe 3 :

für $a = 5, b = \frac{1}{2}$

a) Nullstellen : $a \cdot \sqrt{x} = b \cdot x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{a^2}{b^2}$

$x_1 = 0, x_2 = 100$

Extrema : $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - b$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{x}} = b \Rightarrow x_3 = \frac{a^2}{4b^2}$

$x_3 = 25$

$y_3 = f(x_3) = a \cdot \frac{a}{2b} - b \cdot \frac{a^2}{4b^2} = \frac{a^2}{4b} ; D = 2y_3 = \frac{a^2}{2b}$

$D = 25$

Tangentengleichungen : $x = 0$

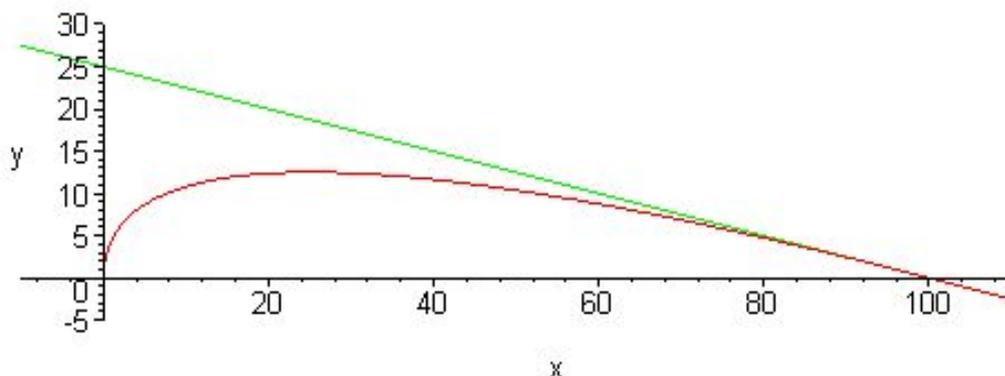
$x = 0$

Tangente bei x_2 :

$f'(x_2) = \frac{a}{2\sqrt{x_2}} - b = -\frac{b}{2} \Rightarrow y = -\frac{b}{2}(x - \frac{a^2}{b^2}) = -\frac{b}{2}x + \frac{a^2}{2b}$

$y = -0.25x + 25$

Die Länge des Körpers beträgt 100, der Durchmesser 25



b) $V = \pi \cdot \int_0^{100} f^2(x) dx = \pi \int_0^{100} (5\sqrt{x} - 0.5x)^2 dx = \pi \int_0^{100} (25x - 5x^{\frac{3}{2}} + 0.25x^2) dx =$
 $= \pi \cdot \left[\frac{25}{2}x^2 - \frac{5}{2.5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{0.25}{3}x^3 \right]_0^{100} = \pi \cdot 8333.3... \approx 26180$

c) $L = \frac{a^2}{b^2}, D = \frac{a^2}{2b} \Rightarrow D = \frac{L \cdot b^2}{2b} = \frac{1}{2}L \cdot b$

$b = \frac{2D}{L} = \frac{2 \cdot 27}{81} = \frac{2}{3} \quad a = \sqrt{\frac{4D^2}{L}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 27^2}{81}} = \sqrt{36} = 6$

d) $\frac{D}{L} = \frac{\frac{a^2}{2b}}{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b}{2}$ Für $b = \frac{2}{3}$ folgt $\frac{D}{L} = \frac{1}{3}$, also $D = \frac{1}{3}L$

Lösung der Aufgabe 4 :

$$P("0") = \frac{7}{16}, P("1") = \frac{4}{16}, P("2") = \frac{3}{16}, P("3") = \frac{2}{16}$$

a) $P(A) = P("1" \cap "1") = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$

$$P(B) = P(\text{mindestens ein Feld 0}) = 1 - P(\text{kein Feld 0}) = 1 - P(" \bar{0} " \cap " \bar{0} ") = 1 - \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{7}{10}$$

b) $P(\text{kein Feld 0}) = \frac{3}{10} = 0.3$

10 Karten, 4 Gewinne : binomialverteilt $P_{10}(4) = \binom{10}{4} (0.3)^4 (0.7)^6 = 0.2001\dots$

c) $P("3" \cap "3") = \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{120}$; $P(\text{nicht zweimal die 3}) = 1 - P("3" \cap "3") =$

Beda kauft n Karten : $(\frac{119}{120})^n \leq 0.5$

$$n \geq 82,8 \text{ Beda muss mindestens 83 Karten kaufen.}$$

d) $P(\text{zwei verschiedene Zahlen} \geq 1) = P[("1" \cap ("2" \cup "3")) \cup ("2" \cap ("1" \cup "3")) \cup ("3" \cap ("1" \cup "2"))] =$
 $= \frac{4}{16} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{16} \cdot \frac{6}{15} + \frac{2}{16} \cdot \frac{7}{15} = \frac{13}{60}$

$$P("2" \cap "2") = \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{40}$$

Die Zufallsvariable X (Gewinn) kann die Werte 0, 1, 5, 10 oder 30 annehmen :

X	0	1	5	10	30
P(X)	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$

a) d) a) d) c)

$$E(X) = 0 \cdot \frac{7}{10} + 1 \cdot \frac{13}{60} + 5 \cdot \frac{1}{120} + 10 \cdot \frac{1}{40} + 30 \cdot \frac{1}{120} = \frac{29}{30} = 0.96\dots$$

Lösung der Aufgabe 5 :

a) $x^2 \cdot e^x = 2e^x \Rightarrow (x^2 - 2) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

$$\int (x^2 - 2) \cdot e^x dx = (x^2 - 2) \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx =$$

$$= (x^2 - 2) \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx) = (x^2 - 2) \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x) \cdot e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$F = \left| \left[(x^2 - 2x) \cdot e^x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \right| = \left| (2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}} - (2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}} \right| = | -4.589 \dots | = 4.58\dots$$

b) Die Ebene E hat die Vektoren $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren, hat also

die Parametergleichung $E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[Alternative Lösung : Koordinatengleichung (Achsenabschnittform)

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 6 = 0 \quad]$$

Der Richtungsvektor der Geraden g ist $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$, die Gleichung der Geraden ist also g :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ p \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade steht senkrecht zur Ebene, wenn $\vec{PQ} \perp \vec{AB} \perp \vec{AC}$ ist :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix} = -18 + 21 - 3p + 0 = 3 - 3p = 0, \text{ woraus sich } p = 1 \text{ ergibt, also } P(-7|1|-1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ q+1 \end{pmatrix} = -18 + 0 + 2q + 2 = -16 + 2q = 0, \text{ woraus man } q = 8 \text{ erhält und } Q(11|7|8).$$

[Alternative Lösung : Da $\vec{PQ} \perp \vec{E}$, so folgt $\vec{PQ} = 3 \cdot \vec{n}_E \Rightarrow p = 1, q = 8$]

Die Gerade hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Da den Maturandinnen und Maturanden die Abstandsformel mit der Hesseschen Normalform nicht bekannt ist, muss der Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene E bestimmt werden :

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man erhält das System
$$\begin{cases} 8 - u - v - 6t = 0 \\ -1 + 3u - 2t = 0 \\ 1 + 2v - 3t = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $3u = 1 + 2t$ und aus der dritten Gleichung $2v = -1 + 3t$, was in der ersten Gleichung eingesetzt $t = 1$ ergibt.

Der Durchstosspunkt ist der Punkt D(-1|3|2), der Abstand von P zur Ebene E beträgt

$$|\vec{PD}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7, \text{ der Abstand von Q zur Ebene beträgt}$$

$$|\vec{QD}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(12)^2 + (4)^2 + 6^2} = 14$$