**Lösung der Aufgabe 1**

a) $r \cdot p = \frac{h}{2\pi}$, also $p = \frac{h}{2\pi \cdot r}$ ;

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{h}{2\pi \cdot r}\right)^2 = \frac{h^2}{8\pi^2 m \cdot r^2}$$ und $m = m_e$

b) $E(r) = E_{kin} - E_{pot} = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{e^2}{r}$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e} \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{-2h^2\varepsilon_o + e^2\pi \cdot m_e \cdot r}{8\pi^2 m_e r^3 \varepsilon_o}$$

$\frac{dE}{dr} = 0$ : $-2h^2\varepsilon_o + e^2 \cdot 2\pi m_e\, r = 0$

$$\Rightarrow \quad r = r_o = \frac{h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}}{\pi \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})^2} = 5{,}293 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$\underline{E(r_o) = -2{,}179 \cdot 10^{-18} \text{ J} = E_o}$

c) $r_1 = r_o - 0{,}035 \cdot r_o = 0{,}965 \cdot r_o = 5{,}108 \cdot 10^{-11}$ m

$E(r_1) = -2{,}176 \cdot 10^{-18}$ J $= E_1$  $\Delta E = E_1 - E_o = 3 \cdot 10^{-21}$ J

$\Delta E_{ges} = N_A \cdot \Delta E = 6 \cdot 10^{26} \cdot 3 \cdot 10^{-21} = 1{,}8 \cdot 10^6$ m$^3$

$V_o = N_A \cdot \frac{4}{3}\pi r_o^3 = 3{,}74 \cdot 10^{-4}$ m$^3$
$\Delta V = 0{,}1\, V_o = 3{,}74 \cdot k10^{-5}$ m$^3$

$\Delta E = \overline{p} \cdot \Delta V$  $\overline{p} = \frac{\Delta E}{\Delta V}$ $= 4{,}8 \cdot 10^{10}$ Pa $= 0{,}48$ Mbar

**Lösung der Aufgabe 2 :**

a) $P = \frac{U^2}{R}$ , $R_B = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2}{100}\,\Omega = 529\,\Omega = R_{3000^\circ}$

$J_B = \frac{U}{R_B}$ = k0,435 A

$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$ mit $\rho_{\text{Wolfram20}} = 5{,}3 \cdot 10^{-8}$ und $\rho_{\text{Wolfram3000}} = 113 \cdot 10^{-8}$ (FoSa S.177)

also folgt $\frac{R_E}{R_B} = \frac{5{,}3 \cdot 10^{-8}}{113 \cdot 10^{-8}}$ = 0,0469... ; $R_E$ = 0,0469 · 529 Ω = 24,81... Ω

$J_E = \frac{U}{R_E}$ = 9,27 A Einschaltstrom

b) $P = A\,\sigma T^4$ (Stefan-Bolzmann)

$A = \frac{P}{\sigma T^4} = \frac{100}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}3273^4}$ $m^2 = 1{,}54 \cdot 10^{-5}\,m^2 = 15{,}4\,mm^2$

c) wegen $2\pi R\,\ell = A$ und $\frac{\rho\,\ell}{r^2\pi} = R$ ist $\frac{2\pi r}{A} = \frac{R r^2 \pi}{\rho}$ und damit

$r^3 = \frac{A\rho}{2R\pi^2} = \frac{1{,}54 \cdot 10^{-5} \cdot 113 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 529 \cdot \pi^2}$ , $r = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ m = 0,012 mm; $\ell = \frac{A}{2\pi r}$ = 0,21 m

d) U = 12 V ; $R_B = \frac{U^2}{P}$ = 1,44 Ω ; $A = 1{,}54 \cdot 10^{-5}\,m^2$

wie in c) $r^3 = \frac{1{,}54 \cdot 10^{-5} \cdot 113 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 1{,}44\,\pi^2}$ ; $r = 8{,}5 \cdot 10^{-5}$ m

$\ell = \frac{A}{2\pi r} = \frac{1{,}54 \cdot 10^{-5}}{2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-5}}$ m = 0,029 m = 2,9 cm

**Lösung der Aufgabe 3 :**

a) Affinitätsrichtung ist $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Abbildungsgleichungen $x' = a_1x + b_1y + c_1$
$y' = a_2x + b_2y + c_2$

Da der Ursprung auf der Affinitätsachse liegt, ist die Abbildung Ursprungsabbildung, d.h. $c_1 = c_2 = 0$.

Abbildung des Punktes (0/6) : $-4 = 6b_1 \Rightarrow b_1 = -\frac{2}{3}$
$-6 = 6b_2 \Rightarrow b_2 = -1$

Die Gleichungen $x = a_1x - \frac{2}{3}y \Leftrightarrow (a_1 - 1)x - \frac{2}{3}y = 0$ (Fixpunktbedingung)
$y = a_2x - y \qquad a_2x - 2y = 0$

ergeben beide die Gleichung der Fixpunktgeraden $x + 2y = 0$, also ist $a_2 = -1$ und $a_1 = \frac{2}{3}$.

Die Abbildungsgleichungen lauten $x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y$
$y' = -x - y$

Umkehrabbildungen : aus $\frac{3}{2}x' = x - y$ und $y' = -x - y$ folgt $\left| \begin{array}{l} x = \frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y' \end{array} \right|$

Einsetzen in die Gleichung des Kreises : $(\frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y')^2 + (-\frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y')^2 = 9$

Man erhält $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$, also eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(0|0)$ den Halbachsen $a = 2\cdot\sqrt{2}$ und $b = 3\cdot\sqrt{2}$.

b) $x^2y' + 2xy = 0$ (homogene Gleichung)

$y' = -\frac{2y}{x}$, also $\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}$

Die Integration ergibt : $\ln|y| = -2\cdot\ln|x| + c = \ln|\frac{1}{x^2}| + \ln k = \ln\frac{k}{x^2}$ also $y = \frac{k}{x^2}$

$y' = -\frac{2y}{x} - \frac{4}{x^2}$ (inhomogene Gleichung)

Man erhält als Tabelle für die Steigungen in den Gitternetzpunkten :

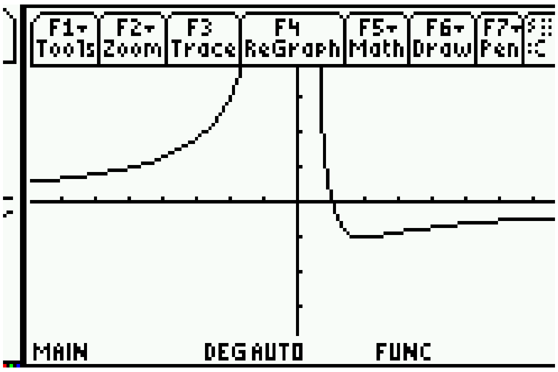
| y\x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| -3 | - | 2 | 2 | 1.55 | 1.25 |
| -2 | - | 0 | 1 | 0.88 | 0.75 |
| -1 | - | -2 | 0 | 0.22 | 0.25 |
| 0 | - | **-4** | -1 | -0.4 | -0.3 |
| 1 | - | -6 | -2 | -1.1 | -0.8 |
| 2 | - | -8 | -3 | -1.8 | -1.3 |
| 3 | - | -10 | -4 | -2.4 | -1.8 |

Das CAS des TI-89 liefert als Lösung

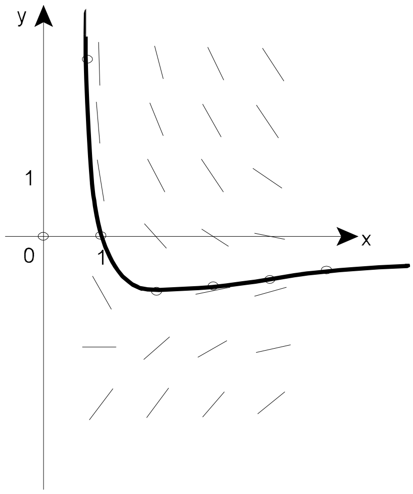
die Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{\text{const}}{x^2} - \frac{4}{x}$$

Graph (TI-89) :




Richtungsfeld :




**Lösung der Aufgabe 4 :**

a) Definitionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Fixpunkte : $z = \frac{z+1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad z^2 - z = z + 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 2z - 1 = 0$

Lösungen der Gleichung durch quadratisches Ergänzen :

$z^2 - 2z + 1 = 2$

$(z-1)^2 = 2 \text{ cis } 0°$

$z - 1 = \sqrt{2} \text{cis } 0°$ also $z_1 = \sqrt{2} + 1$

und $z - 1 = \sqrt{2} \text{cis } 180°$ also $z_2 = -\sqrt{2} + 1$

Umkehrfunktion $w = \frac{z+1}{z-1}$

$(z - 1) \cdot w = z + 1$

$z \cdot w - z = w + 1$

$z \cdot (w - 1) = w + 1$

$z = \frac{w+1}{w-1}$ Die Gleichung der Umkehrfunktion hat dieselbe

------------- algebraische Form wie die Ausgangsfunktion.

b) Reelle Achse der z-Ebene : $z - \bar{z} = 0$; Umkehrabbildung eingesetzt :

$$\frac{w+1}{w-1} - \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} = 0$$

$(w + 1) \cdot (\bar{w} - 1) - (\bar{w} + 1) \cdot (w - 1) = 0$

$w\bar{w} - w + \bar{w} - 1 - w\bar{w} + \bar{w} - w + 1 = 0$

$$2(\overline{w} - w) = 0$$
$$\overline{w} - w = 0 \qquad \underline{\text{Reelle Achse der w-Ebene}}$$

Die reelle Achse ist keine Fixpunktgerade, z.B. wird der Punkt z = 2 auf den Punkt w = 3 abgebildet ? (Es gibt nur zwei Fixpunkte).

Imaginäre Achse der z-Ebene : $z + \overline{z} = 0$; Umkehrabbildung eingesetzt :

$$\frac{w+1}{w-1} + \frac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1} = 0$$

$$(w + 1) \cdot (\overline{w} - 1) + (\overline{w} + 1) \cdot (w - 1) = 0$$
$$w\overline{w} - w + \overline{w} - 1 + w\overline{w} - \overline{w} + w - 1 = 0$$
$$2\,w\overline{w} = 2$$
$$w\overline{w} = 1 \qquad \underline{\text{Einheitskreis der w-Ebene}}$$

c) $z_o = 0 \qquad w_o = \frac{0+1}{0-1} = -1$

$z_1 = \boldsymbol{i} \qquad w_1 = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{i^2-1} = -\frac{1}{2} \cdot 2i = -i$

$z_2 = 2 \cdot \boldsymbol{i} \qquad w_2 = \frac{2i+1}{2i-1} = \frac{-4+4i+1}{-4-1} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

$z_3 = 3 \cdot \boldsymbol{i} \qquad w_3 = \frac{3i+1}{3i-1} = \frac{-9+6i+1}{-9-1} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

$z_n = n \cdot \boldsymbol{i} \qquad w_n = \frac{ni+1}{ni-1} = \frac{(1-n^2) + 2n \cdot i}{-n^2-1}$

d) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2+2ni}{-n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 1 + \frac{2i}{n}}{-1 - \frac{1}{n^2}} = 1$

Die positive imaginäre Achse wird also auf den Halbkreis unterhalb der reellen Achse der w-Ebene abgebildet.

e)

| z-Ebene | w-Ebene |
|---|---|
| positive imaginäre Achse | Einheits-Halbkreis unter der reellen Achse |
| reelle Achse | reelle Achse |
| $r > 1$ | $r > 1$ |
| $0 \leq r < 1$ | $r \leq -1$ |
| $-1 \leq r < 0$ | $-1 < r \leq 0$ |
| $r < -1$ | $0 < r < 1$ |

Der Wert $z = 1 + \boldsymbol{i}$ wird auf den Wert $w = 1 - 2\cdot\boldsymbol{i}$ abgebildet.
Der erste Quadrant der z-Ebene wird als auf die unter der reellen Achse der w-Ebene liegende Halbebene abgebildet, ausgenommen die Werte im Einheitskreis der w-Ebene.