Lösung der Aufgabe 1

a) $f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$

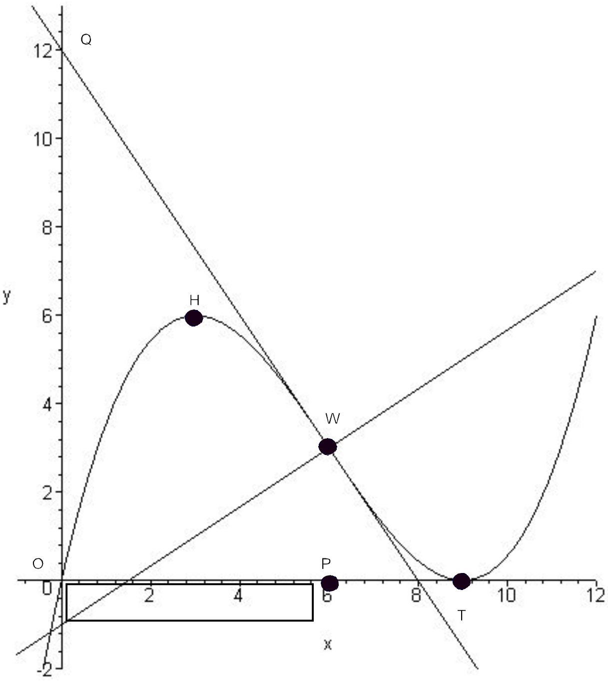
$f''(x) = \frac{1}{3}x - 2$

Nullstellen : $\frac{1}{18}x\cdot(x^2 - 18x + 81) = \frac{1}{18}(x - 9)^2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$ (doppelte Nullstelle)

Horizontale Tangenten : $\frac{1}{6}(x^2 - 12x + 27) = \frac{1}{6}(x-3)(x-9) = 0$

$f''(3) = -1 < 0$, Hochpunkt H(3|6) $\quad f''(9) = 1 > 0$ Tiefpunkt T(9|0)

$f''(x) = 0$ für $x = 6$, $f'''(6) = \frac{1}{3} \neq 0$ $\quad$ Wendepunkt W(6|3)



b) Wendetangente t

Steigung $m_t = f'(6) = -\frac{3}{2}$

$t : y = -\frac{3}{2}x + q_t$

Durch W : $6 = -\frac{3}{2}3 + q_t$

$\Rightarrow q_t = 12$

$t : y = -\frac{3}{2}x + 12$

Dreiecksfläche Δ OWQ :

$A = \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 12 = 36$

Fläche des Parabelsegments :

$$F = \int_0^6 f(x)dx - F_{\Delta OPW} =$$

$$= \int_0^6 \left(\tfrac{1}{18}x^3 - x^2 + \tfrac{9}{2}x\right)dx - \tfrac{1}{2}\cdot 6 \cdot 3 = \left[\tfrac{1}{72}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{9}{4}x^2\right]_0^6 - 9 =$$

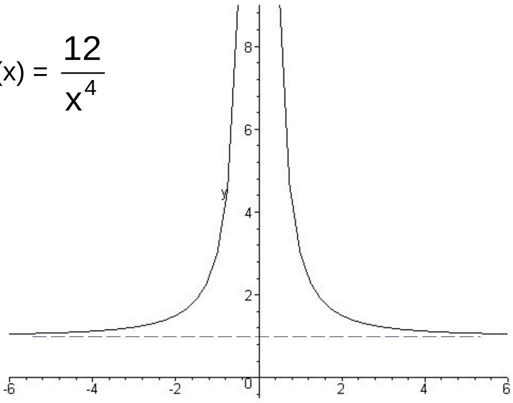
$= 18 - 72 + 81 - 9 = 18 = ½ A$

c) Normale n zur Kurve im Wendepunkt : $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = \frac{2}{3}$

$n : y = \frac{2}{3}x + q_n$ durch W(6|3) : $q_n = -1$. Die Breite des Rechtecks ist 1, der Umfang 14.

Lösung der Aufgabe 2

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2}$ $\quad f'(x) = -\frac{4}{x^3}$ $\quad f''(x) = \frac{12}{x^4}$



f hat keine Nullstellen.

Asymptoten sind die Geraden y = 1 (horizontal)
und x = 0 (vertikal, Polstelle)

Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

b) A(b) = $\int_1^b (1+\frac{2}{x^2})dx = \left[x - \frac{2}{x}\right]_1^b = b - \frac{2}{b} + 1$ Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} A(b)$ existiert nicht.

c) Tangente t : y = mx + q mit m = $-\frac{a}{4}$ durch den Punkt (2 | 1+ $\frac{a}{4}$)

t : y = $-\frac{a}{4}x + \frac{3a}{4} + 1$ mit der Nullstelle $x_o = \frac{4}{a} + 3$

Flächenfunktion A(a) = ½·q·x_o = $\frac{1}{8a}(4+3a)^2$

Extremalstellen : A'(a) = $\frac{9a^2-16}{8a^2}$ A'(a) = 0 für a = $\frac{4}{3}$ (a < 0)

d) Das Extremum ist ein Minimum, weil A"(a) = $\frac{4}{a^3} > 0$ für a > 0.

Dreiecksfläche A = 6

Lösung der Aufgabe 3

a) $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$, Kugelradius R = $\frac{1}{2}\sqrt{64+64+196}$ = 9

Mittelpunkt $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{AS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, M(3 | -2 | 1); Kugelgleichung k : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + 2z = 81$

b) Vektor normal zu E : $\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebene E : x - 2y + 2z + D = 0. A(-1 | -6 | 8) $\in$ E : D = - 27

E : x - 2y + 2z - 27 = 0

c) Für den Winkel φ zwischen dem Normalenvektor und dem Vektor $\overrightarrow{AS}$ gilt :

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}4\\4\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}}{9\cdot 3} = \frac{3-8-14}{27} \qquad \varphi = 131.8^\circ$$

Der Winkel zwischen der Ebene und der Geraden beträgt $\gamma = \varphi - 90^\circ = 41.8^\circ$

d) Für den Inhalt G der Grundfläche ABC gilt :$G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36+144+144} = 9$

Die Höhe h der Pyramide ist der Abstand des Punktes S von der Ebene E : x - 2y + 2z - 27 = 0
S(7 | 2 | -6) einsetzen in die HNF : es ergibt sich h = 12

e) Der gesuchte Kreismittelpunkt M' ist der Durchstosspunkt der Normalen durch M senkrecht zur Ebene E durch diese Ebene :

$\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ schneiden mit E : 3 + t - 2·(-2-2t) + 2·(1+2t) - 27 = 0 $\Rightarrow$ t = 2

M'(5 | -6 | 5). Der Kreisradius ist r' = $\left|\overrightarrow{M'A}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 6.7\ldots$

Lösung der Aufgabe 4.1

a) $P(X = 2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{20}\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{17}{20}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{10} = \frac{12+17+27}{1000} = \frac{56}{1000}$

b) $P(X = 3) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{1000}$

$P(X = 1) = \frac{1}{5}\cdot\frac{17}{20}\cdot\frac{9}{10} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{10} + \frac{4}{5}\cdot\frac{17}{20}\cdot\frac{1}{10} = \frac{153+108+68}{1000} = \frac{329}{1000}$

$P(X = 0) = \frac{4}{5}\frac{17}{20}\frac{9}{10} = \frac{612}{1000}$

Erwartungswert $E(X) = \frac{0\cdot 612+1\cdot 329+2\cdot 56+3\cdot 3}{1000} = \frac{45}{1000}$

c) Gegenrereignis : Das Ziel wurde nicht verfehlt mit der Wahrscheinlichkeit P(T) = 1 - P(0) = $\frac{388}{1000}$

P(B trifft) = $\frac{3}{20}$, $P(B|T) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{388}{1000}} = \frac{75}{194}$

Lösung der Aufgabe 4.2

a) Gegenereignis : P(nie Feld 13) = $\left(\frac{36}{37}\right)^{10}$ = 0.7603...

P(mindestens einmal Feld 13) = 1 - 0.7603... = 0.2396...

b) P(mindestens einmal Feld 13 in n Runden) = 1 - P(nie Feld 13 in n Runden) = 1 - $\left(\frac{36}{37}\right)^{n}$ > 0.9

n > 84.039, also n $\geq$ 85.

c) P(mindestens 3 mal) = 1 - $\binom{20}{2}\cdot\left(\frac{34}{37}\right)^{18}\cdot\left(\frac{3}{37}\right)^{2} - \binom{20}{1}\cdot\left(\frac{34}{37}\right)^{19}\cdot\frac{3}{37} - \binom{20}{0}\cdot\left(\frac{34}{37}\right)^{20}$

$\approx$ 1 - 0.2726 - 0.3252 - 0.1843 = 0.2178

Lösung der Aufgabe 5.1

a) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, also $\gamma = 54.^\circ1$

Sinussatz : $\overline{AC} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \overline{AB} = 505.61...$ Die Turmhöhe beträgt $h = \overline{AC} \cdot \tan\delta = 54.93...$

Die Turmhöhe beträgt etwa 54.9 m.

b) Der Schall legt in 1.00 Sekunden die Strecke $\overline{FT} = 344$ m zurück.

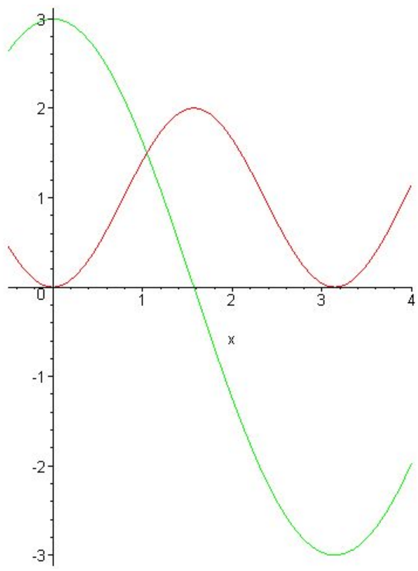
Pythagoras : $\overline{CF} = \sqrt{\overline{FT}^2 - h^2} = 339.59...$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck ACF folgt : $\overline{FA}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{CF} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\gamma$

$\overline{FA} = 411.83...$

Das Schiff war etwa 340 m von C entfernt und 412 m von A.

Lösung der Aufgabe 5.2



a) Schnittpunkt : $2\sin^2 x = 3\cos x$ ergibt die quadratische Gleichung $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ mit der Lösung $\cos x = -\frac{1}{2}$ (zweite Lösung $\cos x = -2$). Die Koordinaten des Schnittpunktes sind $S(\frac{\pi}{3}|\frac{3}{2})$
.

Schnittwinkel :

$f'(x) = 4\sin x\cos x$, $f'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$). Der Steigungswinkel beträgt 60° .

$g'(x) = -3\sin x$, $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Der Steigungswinkel beträgt $-68.^\circ948...$

Der stumpfe Schnittwinkel ist $128.^\circ9...$, der spitze Schnittwinkel $51.^\circ1...$

b) Der Inhalt der von den Graphen von f und g und der y-Achse eingeschlossenen Fläche beträgt :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3\cos x - 2\sin^2 x)dx = \left[3\sin x - x + \sin x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 1.98...$$