

Mathematik Typus C (Be / Bh)

Bemerkungen : Zeit : Drei Stunden
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Analysis

Eine Kurvenschar mit Scharparameter $a \in \mathbb{R}^+$ wird beschrieben durch

$$x \rightarrow y = f_a(x) = (|x| + x) \cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}$$

- Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abhängigkeit von a .
- Skizzieren Sie den Graphen für $a = 1$ (Einheit 2 cm).
- Auf welcher Kurve liegen alle Hochpunkte der Graphen der Schar?
- Berechnen Sie den Parameter a so, dass der Inhalt der ins Unendliche reichenden Fläche zwischen Kurve und der x -Achse diesen Wert a annimmt.

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Firma Burnout verkauft Brenner für Heizungen. Für zwei Drittel der Brenner wird ein Servicevertrag abgeschlossen, der regelmässige Wartung und kostenlose Behebung von Pannen garantiert. Die jährliche Zuverlässigkeit wurde wie folgt ermittelt: Brenner ohne Servicevertrag arbeiten mit 70%, jene der gewarteten Geräte mit 82% einwandfrei.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert ein beliebiger Brenner einwandfrei?
- Für Kunden ohne Vertrag fallen bei Pannen in der Hälfte der Fälle Jahreskosten von 150 Fr. in einem Drittel solche von 250 Fr. und für das restliche Sechstel 600 Fr. an. Wie müsste der Preis des Servicevertrags (für pannenfreie und gestörte) Brenner kostendeckend angesetzt werden?
- Der Brenner von Hausbesitzer Carl streikt. Wie wahrscheinlich ist es, dass Carl keinen Servicevertrag hat?
- Liegenschaftsverwalter Diet schliesst keinen Vertrag ab und hofft, dass von 20 Brennern mindestens deren 16 störungsfrei laufen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sein Wunsch ein?
- Von einer neuen Serie von 200 verkauften Brennern überstehen nur 148 ein Jahr ohne Störung. Burnout befürchtet, dass die Qualität abgenommen hat und konzipiert zur Beurteilung dieser Vermutung einen Test: Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, Testgrösse X ? Nullhypothese? Verwerfungsbereich? Entscheid?

3. Vektorgeometrie

Gegeben sind zwei Geraden im Raum

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g und h .
- Geben Sie die Gleichung der kleinsten Kugel an, die beide Geraden berührt.
- Berechnen Sie die Gleichung jener Kreiszyylinderfläche mit Achse g , die h als Tangente hat.
- Der Öffnungswinkel einer Kreiskegelfläche mit Spitze $S(5/3/7)$ und Achse h ist so zu bestimmen, dass g den Kegel berührt.

4. Komplexe Zahlen

Gegeben sind die drei komplexen Funktionen

$$w = f(z) = (1 - i)z - 2i \quad w = g(z) = z^2 - \frac{i}{2} \quad w = h(z) = 3(1 + i)\bar{z} - 4$$

- Charakterisieren Sie möglichst genau die Abbildung f (Typus, Fixpunkt).
- Bestimmen Sie alle z , die bei f und g dasselbe Bild haben.
- Wo liegen alle Punkte $Z(z)$, die bei der Abbildung g auf eine Parallele zur imaginären Achse durch den Punkt $P(2 + i)$ abgebildet werden? (Gleichung dieser Punktmenge und Skizze in der z -Ebene).
- Auf welcher Kurve wandert der Mittelpunkt M der Strecke $A(f(z))B(h(z))$, wenn z die Gleichung $|z| = \sqrt{2}$ erfüllt? (Gleichung dieser Kurve und Skizze in der w -Ebene).

5. Kurzaufgaben

- Bestimmen Sie für die affine Abbildung f :

$$\begin{aligned} x' &= ax - 3y \\ y' &= x + (a - 4)y \end{aligned}$$

den Parameter a so, dass $f = f^{-1}$ ist. Charakterisieren Sie dann f möglichst genau.

- Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit $y = f(x)$ der Differentialgleichung

$$y' - xy \cos x = 0$$

- Es sei $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Suchen Sie eine Formel für s_n und beweisen Sie sie mit vollständiger Induktion.