

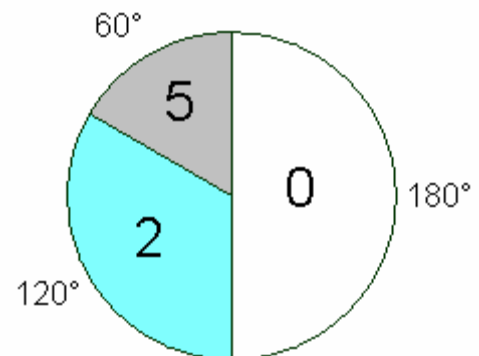
Mathematik      Grundlagenfach

*Bemerkungen:*      Zeit: Drei Stunden  
 Taschenrechner TI83, Formeln und Tafeln DMK/DPK  
 Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.  
 Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben sind die Funktionenscharen  $f_a: y = -ax^2 + 4$  und  $g_a: y = \frac{1}{4}a^2x^2 - a$  mit positivem, reellem Scharparameter  $a$ .

- Skizzieren Sie die beiden dazugehörigen Graphen für  $a = 1$ .
- Zeigen Sie: Die beiden Funktionen  $f_a$  und  $g_a$  haben für beliebiges  $a$  dieselben Nullstellen, d.h. die Schnittpunkte der beiden dazugehörigen Graphen liegen auf der x-Achse.
- Berechnen Sie den Inhalt  $F(a)$  der Fläche zwischen den beiden Graphen von  $f_a$  und  $g_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- Berechnen Sie  $a$  so, dass  $F(a)$  extremal wird. Ist dieses Extremum ein Maximum oder ein Minimum?

2. a) Das nebenstehende Glücksrad wird zehnmal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse :
- Es kommt genau siebenmal der Sektor 2.
  - Der Sektor 2 kommt höchstens zweimal.



- Wie oft muss das Glücksrad gedreht werden, um mit mindestens 95-prozentiger Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal den Sektor 5 zu erhalten ?
- c) Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse :
- Es kommt zweimal der Sektor 2 und einmal der Sektor 5.
  - Der Zeiger bleibt nie auf dem Sektor 0 stehen.
- d) Das Glücksrad wird auf einer Wohltätigkeitsveranstaltung eingesetzt. Pro Spiel bezahlt ein Teilnehmer 5 Franken Einsatz und darf das Glücksrad dreimal drehen. Dann erhält er das Produkt der drei Sektorwerte ausbezahlt, also im schlechtesten Fall 0 Franken und im besten Fall 125 Franken. Welchen Nettogewinn kann der Lotterie-Veranstalter pro Spiel erwarten ?

3. Gegeben ist die Pyramide  $A(0/1/1)$   $B(2/0/1)$   $C(1/2/4)$   $D(4/7/-1)$ .
- Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene  $E = (ABC)$  ?
  - Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  des Dreiecks  $ABC$  bei  $A$ .
  - Bestimmen Sie die Koordinaten des Fusspunktes  $F$  auf  $AB$  der Dreieckshöhe durch  $C$ .
  - Wie gross ist der Inhalt  $J$  des Dreiecks  $ABC$ ? (ist auch unabhängig von Teilaufgabe c) lösbar)
  - Sei  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$ . Zeigen Sie, dass  $SD$  senkrecht auf der Ebene  $E = (ABC)$  steht und berechnen Sie dann das Volumen der Pyramide.
4. a) Die Kurve  $k : y = \sqrt{5x}$ , die Tangente im Kurvenpunkt  $B(5/?)$  und die  $x$ -Achse begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- b) Gegeben ist jetzt die Kurvenschar  $k_a : y = \sqrt{ax}$  ( $a > 0$ ). Im Kurvenpunkt  $B(a/?)$  wird die Tangente an die Kurve gelegt. Zeigen Sie : Diese Tangente schneidet die  $x$ -Achse für jeden Parameterwert  $a$  an der Stelle  $x_0 = -a$ .
- c) Das von der Kurve  $y = \sqrt{ax}$ , ihrer Tangente im Kurvenpunkt  $B(a/?)$  und der  $x$ -Achse begrenzte Flächenstück wird um die  $x$ -Achse gedreht. Dabei entsteht ein Rotationskörper, eine Art Sektglas ohne Fuss. Zeigen Sie : Die zur  $x$ -Achse normale Ebene bei  $x = 0$  zerschneidet den Rotationskörper in zwei volumengleiche Teilkörper.
- d) Für welchen Parameterwert  $a$  hat der unter c) beschriebene ganze Rotationskörper das Volumen  $4.5 \pi$  ?
5. Der Kreis  $k_1$  ist gegeben durch die Gleichung  $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0$ , ein zweiter Kreis  $k_2$  hat den Mittelpunkt  $M_2(-4/7)$  und den Radius  $r_2 = 5$ .
- Zeigen Sie, dass die beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  bezüglich der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $3x - 2y = 0$  symmetrisch liegen. Erstellen Sie eine sorgfältige Zeichnung der Situation.
  - Welches ist die kürzeste Entfernung zwischen Punkten des Kreises  $k_1$  und  $k_2$  ?
  - Zeigen Sie, dass der Punkt  $A(-1/3)$  auf dem Kreis  $k_2$  liegt und bestimmen Sie die Tangente  $t_2$  des Kreises  $k_2$  durch den Punkt  $A$ .
  - Welchen (spitzen) Winkel schliesst die Tangente  $t_2$  mit der Geraden  $g$  ein ?
  - Der Kreis  $k_1$  hat zwei Tangenten, die parallel zu  $t_2$  verlaufen. Wie lautet die Gleichung derjenigen Tangente, die näher bei  $t_2$  liegt ?