

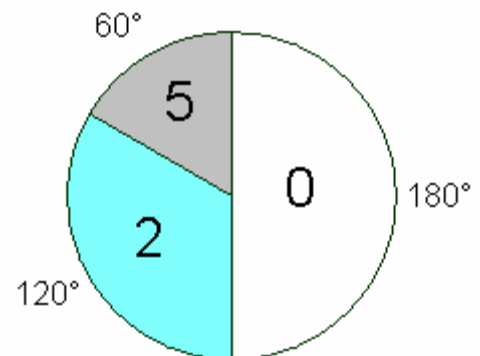
Mathematik Grundlagenfach

Bemerkungen: Zeit: Drei Stunden
Taschenrechner TI83, Formeln und Tafeln DMK/DPK
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben sind die Funktionenscharen $f_a: y = -ax^2 + 4$ und $g_a: y = \frac{1}{4}a^2x^2 - a$ mit positivem, reellem Scharparameter a .

- Skizzieren Sie die beiden dazugehörigen Graphen für $a = 1$.
- Zeigen Sie: Die beiden Funktionen f_a und g_a haben für beliebiges a dieselben Nullstellen, d.h. die Schnittpunkte der beiden dazugehörigen Graphen liegen auf der x -Achse.
- Berechnen Sie den Inhalt $F(a)$ der Fläche zwischen den beiden Graphen von f_a und g_a in Abhängigkeit von a .
- Berechnen Sie a so, dass $F(a)$ extremal wird. Ist dieses Extremum ein Maximum oder ein Minimum?

2. a) Das nebenstehende Glücksrad wird zehnmal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse :
- Es kommt genau siebenmal der Sektor 2.
 - Der Sektor 2 kommt höchstens zweimal.



- Wie oft muss das Glücksrad gedreht werden, um mit mindestens 95-prozentiger Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal den Sektor 5 zu erhalten ?
- c) Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse :
- Es kommt zweimal der Sektor 2 und einmal der Sektor 5.
 - Der Zeiger bleibt nie auf dem Sektor 0 stehen.
- d) Das Glücksrad wird auf einer Wohltätigkeitsveranstaltung eingesetzt. Pro Spiel bezahlt ein Teilnehmer 5 Franken Einsatz und darf das Glücksrad dreimal drehen. Dann erhält er das Produkt der drei Sektorwerte ausbezahlt, also im schlechtesten Fall 0 Franken und im besten Fall 125 Franken. Welchen Nettogewinn kann der Lotterie-Veranstalter pro Spiel erwarten ?

3. Gegeben ist die Pyramide $A(0/1/1)$ $B(2/0/1)$ $C(1/2/4)$ $D(4/7/-1)$.
- Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene $E = (ABC)$?
 - Berechnen Sie den Winkel α des Dreiecks ABC bei A .
 - Bestimmen Sie die Koordinaten des Fusspunktes F auf AB der Dreieckshöhe durch C .
 - Wie gross ist der Inhalt J des Dreiecks ABC ? (ist auch unabhängig von Teilaufgabe c) lösbar)
 - Sei S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Zeigen Sie, dass SD senkrecht auf der Ebene $E = (ABC)$ steht und berechnen Sie dann das Volumen der Pyramide.
4. a) Die Kurve $k : y = \sqrt{5x}$, die Tangente im Kurvenpunkt $B(5/?)$ und die x -Achse begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- b) Gegeben ist jetzt die Kurvenschar $k_a : y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$).
Im Kurvenpunkt $B(a/?)$ wird die Tangente an die Kurve gelegt.
Zeigen Sie : Diese Tangente schneidet die x -Achse für jeden Parameterwert a an der Stelle $x_0 = -a$.
- c) Das von der Kurve $y = \sqrt{ax}$, ihrer Tangente im Kurvenpunkt $B(a/?)$ und der x -Achse begrenzte Flächenstück wird um die x -Achse gedreht. Dabei entsteht ein Rotationskörper, eine Art Sektglas ohne Fuss.
Zeigen Sie : Die zur x -Achse normale Ebene bei $x = 0$ zerschneidet den Rotationskörper in zwei volumengleiche Teilkörper.
- d) Für welchen Parameterwert a hat der unter c) beschriebene ganze Rotationskörper das Volumen 4.5π ?
5. Der Kreis k_1 ist gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0$, ein zweiter Kreis k_2 hat den Mittelpunkt $M_2(-4/7)$ und den Radius $r_2 = 5$.
- Zeigen Sie, dass die beiden Kreise k_1 und k_2 bezüglich der Geraden g mit der Gleichung $3x - 2y = 0$ symmetrisch liegen. Erstellen Sie eine sorgfältige Zeichnung der Situation.
 - Welches ist die kürzeste Entfernung zwischen Punkten des Kreises k_1 und k_2 ?
 - Zeigen Sie, dass der Punkt $A(-1/3)$ auf dem Kreis k_2 liegt und bestimmen Sie die Tangente t_2 des Kreises k_2 durch den Punkt A .
 - Welchen (spitzen) Winkel schliesst die Tangente t_2 mit der Geraden g ein ?
 - Der Kreis k_1 hat zwei Tangenten, die parallel zu t_2 verlaufen. Wie lautet die Gleichung derjenigen Tangente, die näher bei t_2 liegt ?