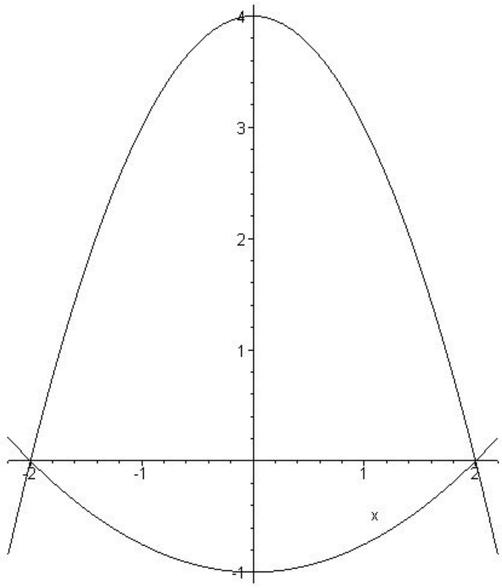
Lösung der Aufgabe 1

a) Skizze für a = 1 :

$f_1(x) = -x^2 + 4$

$g_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$



b) zu zeigen :
f_a und g_a haben dieselben Nullstellen

$$\left.\begin{array}{l} f_a : -ax^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{a}} \\ g_a : \frac{1}{4}a^2x^2 = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} x_{1,2} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{a}} \end{array}\right\} \quad ✔$$

c) Wegen Symmetrie zur y-Achse gilt :

$$F(a) = 2\cdot\int_0^{x_1}(-ax^2 + 4 - (\tfrac{1}{4}a^2x^2 - a))\,dx = 2\cdot\int_0^{x_1}(-a\cdot(1+\tfrac{a}{4})\cdot x^2 + 4 + a)\,dx =$$

$$= 2\cdot(-a\cdot(1+\tfrac{a}{4})\cdot\frac{8}{3a\sqrt{a}} + (4+a)\cdot\frac{2}{\sqrt{a}} = 2\cdot(\frac{16}{3\sqrt{a}} - \frac{4\sqrt{a}}{3}) = \tfrac{8}{3}\cdot(\frac{4}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}) = \tfrac{8}{3}\cdot\frac{a+4}{\sqrt{a}}$$

d) $F'(a) = \frac{8}{3}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2a^{-1} + \frac{1}{2})$
F'(a) = 0 für a = 4
$F''(a) = \frac{8}{3}\cdot(2\cdot\frac{3}{2}\cdot a^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}})$
$F''(4) = \frac{8}{3}\cdot(3\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{32}) > 0$ Für a = 4 wird F(a) minimal.

Lösung der Aufgabe 2

a) Binomialverteilung mit n = 10, p = $\frac{1}{3}$

a_1 : $P(X = 7) = \binom{10}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{120\cdot 8}{3^{10}} \approx 0.01626$

a_2 : $P(X \le 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 10\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^9 + 45\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{1024 + 5120 + 11520}{3^{10}} = \frac{17664}{3^{10}} \approx 0.299$

b) p = $\frac{1}{6}$ x mal drehen

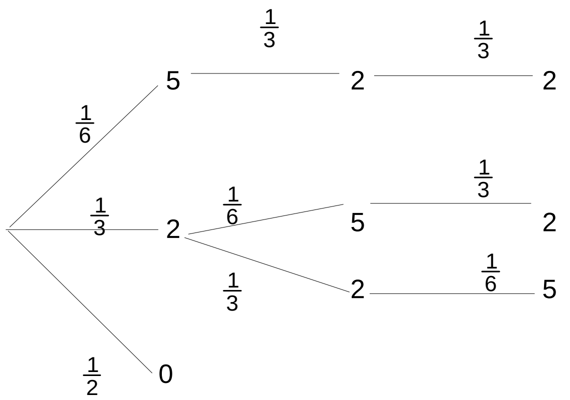
P(mindestens einmal 5) = 1 - P(nie 5) = 1 - $(\frac{5}{6})^x \ge 0.95$

$0.005 \ge (\frac{5}{6})^x \Rightarrow x \ge \frac{\ln 0.05}{\ln 5 - \ln 6} = 16.4...$

Das Glücksrad muss mindestens 17 mal gedreht werden.

c)

c_1:



P(zweimal 2 und einmal 5) =

$= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

c_2 : P(nie 0) = $(½)^3 = \frac{1}{8}$

d) X = Produkt der Sektorzahlen, Werte von X : 0, 8, 20, 50, 125

P(X = 0) = P(mindestens einmal 0) = $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

P(X = 8) = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

P(X = 20) = $\frac{1}{18}$

P(X = 50) = $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

P(X = 125) = $\frac{1}{216}$

E(X) = $0 + \frac{8}{27} + \frac{20}{18} + \frac{50}{36} + \frac{125}{216} = \frac{27}{8}$ = 3.375

Nettogewinn pro Spiel : 5 Fr. - 3.375 Fr.
= 1.625 Fr.

Lösung der Aufgabe 3 :

a) Koordinatengleichung von E = (ABC) :

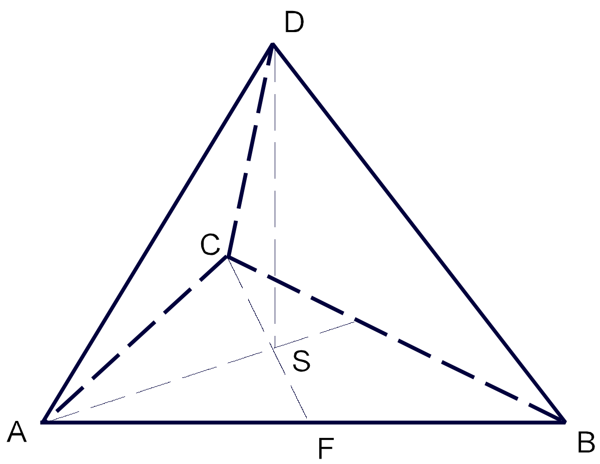
$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{lllll} x & = & & 2u & +v \\ y & = & 1 & -u & +v \\ z & = & 1 & & +3v \end{array} \right| \begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array}$$

1) + 2·2) : x + 2y = 2 + 3v 4)

4) - 3) : x + 2y - z = 1

E : x + 2y - z - 1 = 0



b) $\alpha = \angle(AB,AC) = ?$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$\alpha = 82.25^\circ$

c) Fusspunkt F auf AB :

$$g = (AB):\quad \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad F(\,2t \mid 1\text{-}t \; 1 \; 1)$$

$$\vec{FC}\cdot\vec{AB} = 0: \begin{pmatrix}1-t\\1+t\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = 2-4t-1-t = 0$$

$1 - 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{5} \qquad F(\frac{2}{5} \mid \frac{4}{5} \mid 1)$

d) Flächeninhalt J des Dreiecks ABC : $J = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|\cdot\sin\alpha$

Entweder über α aus Aufgabe b) oder :

$$J = \frac{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{FC}\right|}{2} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{6}{5}\\3\end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{\sqrt{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} = 3.673...$$

e) Schwerpunkt S des Dreiecks ABC : S(1 | 1 | 2)

$$\vec{SD} = \begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist Normalenvektor von (ABC) (Aufgabe a))

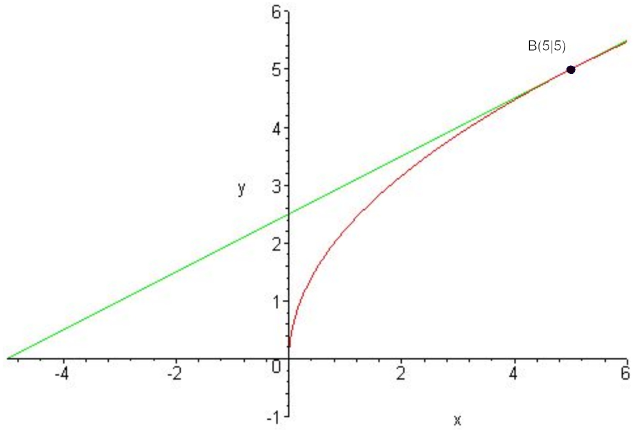
Volumen V der Pyramide $\quad V = \dfrac{J\cdot\left|\vec{SD}\right|}{3} = \dfrac{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}}{2\cdot 3} = 9$

Lösung der Aufgabe 4

a) $k'(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$ $\qquad k'(5) = 0.5$

Tangente in B(5|5) : $y = 0.5\,x + 2.5$

Nullstelle $x = -5$



A =  -  =

$$= \frac{10 \cdot 5}{2} - \int_0^5 \sqrt{5}\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 25 - \left[\sqrt{5} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 = 25 - \frac{50}{3} = \frac{25}{3}$$

b) B(a|a) $\qquad k'(x) = \sqrt{a} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad k'(a) = 0.5$

Tangente $\quad y = 0.5\,x + \dfrac{a}{2}$ $\quad$ Nullstelle : $0.5\,x + \dfrac{a}{2} = 0$ $\quad \Rightarrow \quad x_t = -\,a$

Variante : Gerade g_a : $y = 0.5\,x + \dfrac{a}{2}$ schneiden mit k_a : $\quad \tfrac{1}{2}x + \dfrac{a}{2} = \sqrt{ax}$

$\tfrac{1}{4}(x^2 + 2ax + a^2) = ax \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 = 0$

Doppelte Schnittstelle x = a bedeutet, dass g_a die Kurve k_a berührt. g_a ist Tangente.

---

c) Teilkörper 1 : Kreiskegel

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi}{12}a^3$$

Teilkörper 2 : Kegelstumpf ohne Paraboloid

$$V_2 = \pi\int_0^a \left[\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{a}{2}\right)^2 - \sqrt{ax}^{\,2}\right]dx = \pi\int_0^a \left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{a}{2}x + \tfrac{a^2}{4} - ax\right)dx =$$

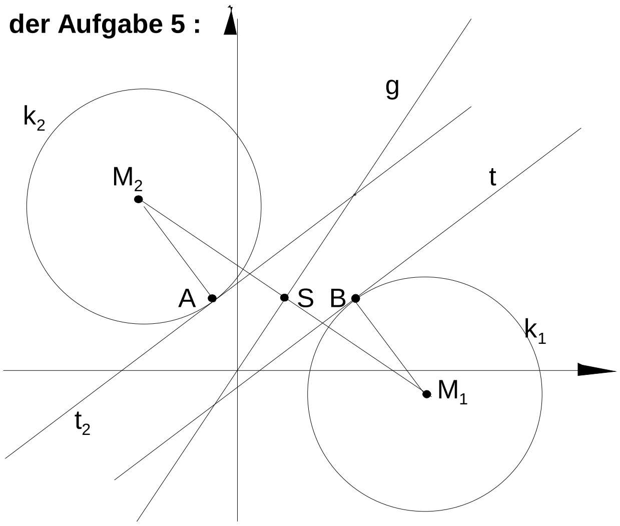
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^a (x^2 - 2ax + a^2)\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{3}a^3 - a^2 + a^3\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{\pi}{12}a^3$$

$V_1 = V_2$ $\qquad$ q.e.d

d) $V_{1+2} = \dfrac{\pi}{6}a^3 = 4.5\,\pi$ $\quad \Rightarrow \quad a^3 = 27$ $\qquad a = 3$ $\quad$ erfüllt die Bediungung

Lösung der Aufgabe 5 :



Lösung :

a) k_1 : $x^2 - 16x + y^2 + 2y + 40 = 0$ | Quadratisch ergänzen

$x^2 - 16x + 64 + y^2 + 2y + 1 = -40 + 64 + 1$

$(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Mittelpunkt $M_1(8 \mid -1)$, Radius $r_1 = 5$

Der Vektor $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$ durch die beiden Kreismittelpunkte steht senkrecht zur Geraden g : $y = \frac{3}{2}x$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -24 + 24 = 0$,

also $\underline{(M_1M_2) \perp g}$.

Der Mittelpunkt S der Strecke M_1M_2 ist S ($\frac{8+(-4)}{2} \mid \frac{7+(-1)}{2}$) = S(2|3) und liegt auf g : $3 = \frac{3}{2} \cdot 2$ ✔

Alternativer Lösungsweg zu a) :

1. $(M_1M_2) \perp g$
2. Die Gerade (M_1M_2) schneidet g im Punkt S: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; Koordinaten einsetzen in 3x-2y = 0 :

   $3 \cdot (8 - 3t) - 2 \cdot (-1 + 2t) = 0$. Es folgt t = 2 und S (2 | 3) .

   Nun ist $\overline{M_1S} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$ und

   $\overline{M_2S} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$, also ist $\underline{\overline{M_1S} = \overline{M_2S}}$.

---

b) Der Abstand der beiden Kreismittelpunkte beträgt $\sqrt{(-12)^2 + 8^2} = \sqrt{208} = 14{,}4\ldots$, die beiden Radien messen zusammen 10, also ist die kürzeste Entfernung von Punkten der Kreisperipherie d $= \sqrt{208} - 10$ = 14,4... - 10 = 4,4... .

[Alternativer Lösungweg zu b) : die Gerade durch die Mittelpunkte schneiden mit den Kreisen und die Entfernung diese Schnittpunkte bestimmen]

c) $A(-1|3) \in k_2$: $((-1) - (-4))^2 + (3 - 7)^2 = 9 + 16 = 25$ ✔

Tangente t_2 durch A : für $P \in t_2$ gilt :

$$\vec{MA} \cdot \vec{AP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x+1) - 4(y-3) = 0$$

t_2 : $3x - 4y + 15 = 0$ oder $y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$

d) t_2 hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, g den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; es folgt

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{4+9}} = \frac{17}{5 \cdot \sqrt{13}}$$

. Man erhält $\alpha = 19.44...°$

e) S ist Symmetriezentrum, also ist $\overline{AS} = \overline{SB}$ .Man erhält

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + 2 \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

Der gesuchte Berührungspunkt ist B(5|3), die Gleichung der Tangente ist $y = \frac{3}{4}x + \text{const}$;
durch Einsetzen der Koordinaten von B erhält man $\underline{y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}}$.

Alternativer Lösungsweg zu e) :
Die Normale zu t_2 hat die Steigung $-\frac{4}{3}$. Die Gleichung einer solchen Normalen lautet also y = $-\frac{4}{3}x$ + const., die Gleichung der Normalen durch $M_2(8|-1)$ ist y = $-\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$.
Der Schnitt des Kreises mit dieser Normalen ergibt die Gleichung
$(x-8)^2 + (-\frac{4}{3}x + \frac{29}{3} + 1)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 16x + 55 = 0$
mit den Lösungen x = 5 und x = 11. Der gesuchte Berührungspunkt ist B(5|3), die Gleichung der Tangente ist demnach $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.