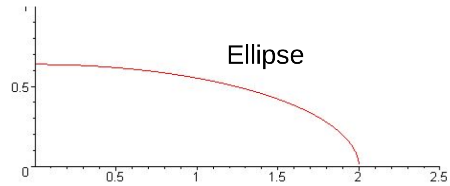
Lösung der Aufgabe 1



a) $\rho(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi} \geq 0$

$\int_0^2 \rho(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^2 =$ (Formelsammlung)

$= \frac{1}{\pi} \cdot (0 + 2 \arcsin 1 - 0 - 2\cdot 0) = 1$

b) $\rho(X \geq 1) = \int_1^2 \rho(x)dx \approx 0.391$ TI 83

c) $E(X) = \int_0^2 x \cdot \rho(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^2 (-2x)\cdot(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\left[\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3\pi}\left[0 - 4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3\pi} \approx 0.85$$

d) $P(1.5 \leq X_1 \leq 1.6 \mid X_1 \geq 1) = \frac{\int_{1.5}^{1.6}\rho(x)dx}{\int_1^2 \rho(x)dx} \overset{TI83}{\approx} \frac{0.0402}{0.3910} \approx 0.103$

Lösung der Aufgabe 2

a) $y' = 9.81 - 0.015\, y^2$

$h = 0.4$

$\Delta y = (9.81 - 0.015y^2)\cdot h$

x	0	0.4	0.8	1.2
y	0	3.924	7.756	11.319
y'	9.81	9.5790	8.9078	
Δy	3.924	3.8316	3.5631	

b) $y = a\frac{e^{bx} - c}{e^{bx} + c}$

$y' = a\frac{be^{bx}(e^{bx}+c) - (e^{bx}-c)be^{bx}}{(e^{bx}+c)^2} = 2abc\frac{e^{bx}}{(e^{bx}+c)^2}$

Eingesetzt in die Differentialgleichung $y' = -ry^2 + g$:

$2abc\frac{e^{bx}}{(e^{bx}+c)^2} = -r\cdot a^2\frac{(e^{bx}-c)^2}{(e^{bx}+c)^2} + g$ $\quad | \cdot (e^{bx}+c)^2$

$2abc\, e^{bx} = -ra^2\, e^{2bx} + 2ra^2c\, e^{bx} - ra^2c^2 + g\, e^{2bx} + 2gce^{bx} + gc^2$

$0 \equiv e^{2bx}\cdot(-ra^2 + g) + e^{bx}\cdot(2ra^2c + 2gc - 2abc) + (-ra^2c^2 + gc^2)$

Koeffizientenvergleich : $-r\,a^2 + g = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{g}{r}}$

$2ra^2c + 2gc - 2abc = 0 \quad \Rightarrow \quad ab = r\,a^2 + g = 2g \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2g}{a} = 2\sqrt{gr}$

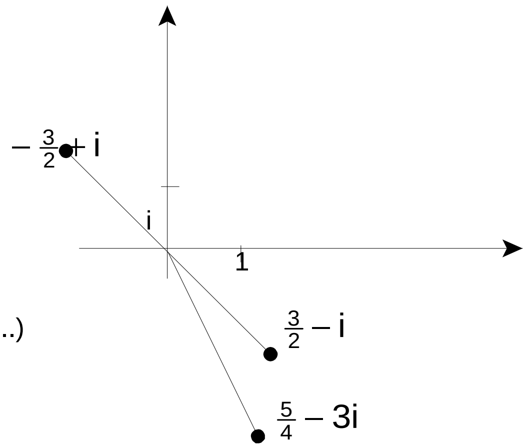
$-r\,a^2\,c^2 + g\,c^2 = 0$ ✔

c) $y(0) = a\dfrac{1-c}{1+c} = 0 \quad\Rightarrow\quad c = 1$

d) $v(t) = a\,\dfrac{e^{bt}-c}{e^{bt}+c}$ $\qquad \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = a = \sqrt{\dfrac{g}{r}} = \sqrt{\dfrac{2gm_s}{c_w \rho_L A}} \approx 25.3\,\dfrac{m}{s}$

(auch aus $\mathring{v} = 0$ und der Differentialgleichung)

Lösung der Aufgabe 3



a) $w = z^2 - 1 + 3i$

Fixpunkte

$z = z^2 - 1 + 3i$

$(z - ½)^2 = 1 - 3i + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - 3i$

$= \sqrt{\frac{25}{16}+9}\ \arctan\dfrac{-3}{\frac{5}{4}} = \dfrac{13}{4}\,\mathrm{cis}(-67\overset{\circ}{.}38...)$

$z_{1,2} - ½ = \pm\dfrac{\sqrt{13}}{2}\,\mathrm{cis}\,33\overset{\circ}{.}69... = \pm\left(\frac{3}{2} - i\right)$

$z_1 = 2 - i \qquad z_2 = -1 + i$

b) $u + iv = (x + iy)^2 - 1 + 3i = x^2 + 2ixy - y^2 - 1 + 3i$ $\qquad u = x^2 - y^2 - 1$
$v = 2xy + 3$

g : $y = x - 2$ in Parameterform $\qquad x = t$
$y = t - 2$

Bild : $u = t^2 - (t-2)^2 - 1 = 4t - 5 \quad\Rightarrow\quad t = \dfrac{u+5}{4}$

$v = 2t(t-2) + 3 = 2t^2 - 4t + 3 = 2\left(\dfrac{u+5}{4}\right)^2 - 4\,\dfrac{u+5}{4} + 3 = \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u}{4} - 2 + \frac{50}{16}$

$v = \frac{1}{8}(u^2 + 2u + 9)$ $\qquad$ Parabel, S(-1|1), Achse vertikal

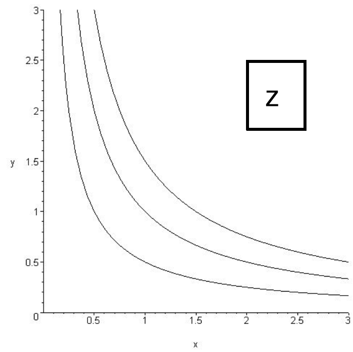
c) nach Moivre $\qquad r = \rho^2$, $\psi = 2\varphi$

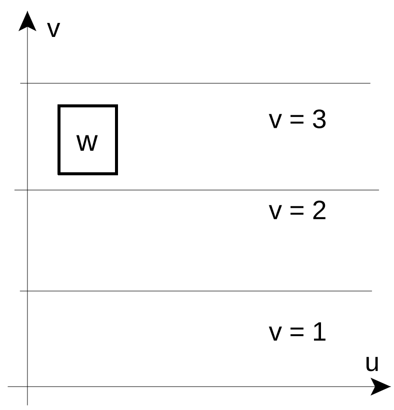
Umkehrabbildung $\qquad \rho = \sqrt{r}$, $\varphi = \dfrac{\psi}{2}$ $\qquad$ existiert eindeutig, Abbildung bijektiv

$0 \le \psi \le \pi \quad\Rightarrow\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

d) v = constant
v = 2xy Hyperbeläste

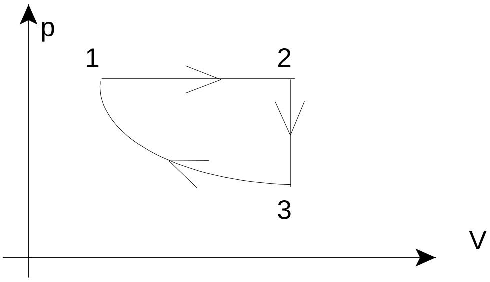
Skizze für v = 1, v = 2, v = 3





Lösung der Aufgabe 4

a)



b) Zustand 1 : $p = 800'000$ Pa, $V_1 = 0.3\ \ell = 3 \cdot 10^{-4}$ m^3
$T_1 = 310$ K

$$p_1 V_1 = n R T_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = 0.0932 \text{ mol}$$

c) iso bar : $p_2 = p_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = 827$ K

d) $\Delta V = V_2 - V_1 = 0.5\ \ell = 5 \cdot 10^{-4}$ m^3

$W_1 = p_1 \Delta V = 400$ J

$Q_1 = C_p\, n\, \Delta T = 1400$ J
(mit $C_p = 29.1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$, $\Delta T = T_2 - T_1 = 517$ K)

e) Wirkungsgrad : $\eta = \frac{W_{netto}}{Q_1} = \frac{W_1 - W_3}{Q_1}$

isotherme Kompression (bei $T_1 = 310$ K)

$$W_3 = n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 235 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{W_1 - W_3}{Q} = 0.118 = 11.8\ \%$$

Lösung der Aufgabe 5

a) $z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

$$|z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = 17.2\ \Omega$$

$\varphi = \arg(z) = -29.°4$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|z|} = 0.698 \text{ A}$$

b) $U(t) = U_R + U_L + U_C = R\,I + L\,\dot{I} + \dfrac{Q}{C}$

mit $I = \dot{Q}$: $U(t) = R\dot{Q} + L\ddot{Q} + \dfrac{Q}{C}$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \hat{U}\cos\omega t$$

Differentialgleichung der erzwungenen gedämpften Schwingung :

$$\ddot{y} + 2\delta\,\dot{y} + \omega_o\,y = A\cos\omega_1 t$$

Resonanz bei $\omega = \omega_o$

$\omega_o^2 = \dfrac{1}{LC}$ $\Rightarrow$ $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 500\ s^{-1}$

Lösung der Aufgabe 6

$m_o = 20'000$ kg, $v = 0.95\,c$ $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0.95^2}} = 3.20$

a) Raumschiff : Bezugssystem S
Raumstationen : Bezugssystem S'

in S : $d = v\cdot t = 0.95$ Ls = 285'000 km

in S' : $d' = \gamma \cdot d$ (d' : “Eigenlänge”)

$d' = 3.04$ Ls = 913'000 km

c) $t_B' = \dfrac{d'}{v} = 3.2$ s $(= \gamma \cdot t)$

d) in S : $t = 1$ x (Eigenzeit der Reise im Raumschiff)

Während dieser Zeit vergeht in den Raumstationen jedoch nur die Zeit
$t' = \dfrac{t}{\gamma} = 0.313$ s, nicht 3.2 s.
Der scheinbare Widerspruch löst sich auf, weil aus Sicht des Raumschiffes (S) die Uhren der Raumstationen nicht synchronisiert sind. Im System S zeigt die Uhr von B bereits die Zeit 2.887 s an, wenn das Raumschiff an A vorbeifliegt.

$\Rightarrow$ Beim Vorbeiflug zeigt B die Zeit 3.2 s an, obwohl nur 0.313 s vergangen sind.

e) $E_k = \gamma\, m_o\, c^2\ ,_o\, c^2 = (\gamma - 1)\, m_o\, c^2 = 3.96 \cdot 10^{21}$ J