KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

MATURITÄTSPRÜFUNG 2003
(Bv, Bh)

Schwerpunktfach
Physik und Anwendungen der Mathematik

Bemerkungen:

Zeit: 3 Stunden

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.

Für 48 Punkte wird die Note 6 erteilt.

Erlaubte Hilfsmittel: DMK/DPK Formelsammlung, Taschenrechner TI 83.

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern nicht im Text definiert).

Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.

Wenn Sie für eine Teilaufgabe ein Resultat einer vorhergehenden Teilaufgabe verwenden müssen, welche Sie nicht gelöst haben, können Sie mit einem selbstgewählten Wert weiter rechnen. Dieser ist dann aber deutlich zu kennzeichnen.

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeit

Eine im Intervall [0, 2] stetig verteilte Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$x \to \rho(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{4 - x^2}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen von ρ und bestätigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1)$ auf 3 Stellen genau.

c) Geben Sie den Erwartungswert $E(X)$ exakt an.

d) Man nimmt einen zufälligen Wert x_1 der Zufallsvariabeln X und stellt fest, dass $x_1 \geq 1$ ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (auf 3 Stellen genau) ist die erste Nachkommastelle von x_1 eine 5 ?

Aufgabe 2: Differentialgleichung

Es ist eine Differentialgleichung, die positive Konstanten r und g enthält, gegeben.

$$y' = -r\, y^2 + g$$

a) Bestimmen Sie numerisch nach der Methode von Euler ausgehend von der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ für die Konstanten $r = 0.015$ und $g = 9.81$ die Näherungen $y(0.4)$, $y(0.8)$ und $y(1.2)$ auf 3 Stellen nach dem Komma. Verwenden Sie die Schrittweite $h = 0.4$

b) Es ist zu zeigen: Der Ansatz $y = a\dfrac{e^{bx} - c}{e^{bx} + c}$, $a > 0$, erfüllt bei geeigneter Wahl der Parameter a und b die Differentialgleichung. Bestimmen Sie a und b allgemein aus r und g

c) Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ist der im Ansatz b) erscheinende Parameter c zu bestimmen.

d) Beim freien Fall eines Körpers (Schrotkugel) kann die Geschwindigkeit unter Berücksichtigung des Luftwiderstands durch die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -r\, v^2 + g \quad \text{mit} \quad r = \frac{c_W \rho_L A}{2m_S} \quad \text{und Schwerebeschleunigung } g$$

beschrieben werden. Gegen welchen konstanten Grenzwert konvergiert die Geschwindigkeit? Verwende $c_W = 0.47$, $\rho_L = 1.3\ \text{kg/m}^3$, $A = 5\cdot10^{-6}\ \text{m}^2$, $m_S = 10^{-4}$ kg

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen

Die komplexe Abbildung $z \to w = f(z) = z^2 + c$ bildet die Gaussebene auf sich ab.

a) Wählen Sie $c = -1 + 3i$ und bestimmen Sie die Fixpunkte von f

b) Stellen Sie die Abbildung f: $z = x + iy \to w = u + iv$ wiederum für $c = -1 + 3i$ mit Real- und Imaginärteil (kartesisch) dar und geben Sie das Bild der Geraden g: $y = x - 2$ an. Um welche Kurve handelt es sich?

c) Es sei nun c = 0. Beschreiben Sie die Abbildung f: $z(\rho, \varphi) \to w(r, \psi)$ polar d.h. durch Argument und Betrag. Begründen Sie: f bildet den ersten Quadranten der z-Ebene bijektiv auf die obere Halbebene $v \geq 0$ der w-Ebene ab. Notieren Sie auch die Gleichungen der Umkehrabbildung polar.

d) Die Geraden v = b, $b \in \mathbf{R}^+$ in der obern Hälfte der w-Ebene beschreiben Stromlinien einer horizontalen stationären Strömung entlang einer Wand (dargestellt durch die u-Achse). Ihre Urbilder bezüglich f: $z \to w = z^2$ im ersten Quadranten der z-Ebene sind die Stromlinien einer stationären "Strömung um die Ecke" . Bestimme die Gleichung dieser Urbilder und zeichne sie für b: 1, 2, 3.

Aufgabe 4: Eine Wärmekraftmaschine

Hinweis: Benützen Sie den Wert in Klammern zum Weiterrechnen, wenn Sie in einer Teilaufgabe kein Resultat erhalten! Diese Werte sind natürlich *falsch*.

Eine Wärmekraftmaschine besteht aus einem Zylinder, der mit Stickstoff gefüllt ist. Ihre Arbeitsweise kann durch folgenden idealisierten, aus drei Schritten bestehenden Kreisprozess beschrieben werden:

1. Vom Anfangszustand (p_1 = 800'000Pa, V_1 = 0.3Liter, T_1 = 310K, Zustand 1) aus erfolgt eine isobare Expansion auf das Volumen V_2 = 0.8Liter (Zustand 2)
2. Nun wird isochor abgekühlt, bis wieder die Anfangstemperatur $T_3 = T_1$ = 310K erreicht wird (Zustand 3).
3. Zuletzt wird das Gas isotherm komprimiert, bis wieder der Anfangszustand erreicht ist (Zustand 1).

a) Skizzieren Sie ein qualitatives *p-V*-Diagramm des Kreisprozesses. Bezeichnen Sie deutlich, wo die Zustände 1-3 liegen und in welche Richtung der Kreisprozess durchlaufen wird.

b) Berechnen Sie die Stoffmenge des Stickstoffs im Zylinder [0.12mol].

c) Berechnen Sie die Temperatur T_2 von Zustand 2 [900K].

d) Berechnen Sie die Arbeit W_1, welche das Gas im ersten Schritt leistet [600J] und die Wärme Q_1, welche dem Gas zugeführt werden muss [1200J].

e) Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Maschine.

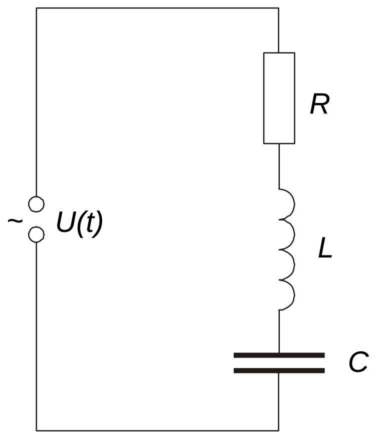
Aufgabe 5: Wechselstromkreis

Eine ohmscher Widerstand R = 15Ω, eine Spule mit Induktivität L = 80mH und ein Kondensator der Kapazität C = 50μF sind in Serie an eine Spannungsquelle geschaltet, welche eine cosinusförmige Wechselspannung liefert: $U(t) = \hat{U} \cdot \cos \omega t$ mit dem Scheitelwert $\hat{U}$ = 12V und der Kreisfrequenz ω = 450s^{-1}.

a) Berechnen Sie die Impedanz (Betrag und Phase) der ganzen Anordnung und den Scheitelwert $\hat{I}$ der Stromstärke im Stromkreis.

b) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Ladung im Kondensator (*oder* für die Spannung über dem Kondensator *oder* für die Stromstärke). Zeigen Sie (mit Hilfe der Formelsammlung), dass diese Anordnung eine erzwungene gedämpfte Schwingung ausführt.

c) Nun soll der Fall betrachtet werden, wo der ohmsche Widerstand R = 0 ist. Die Frequenz der Spannungsquelle kann verändert werden. Bestimmen Sie, bei welcher Frequenz die Stromstärke im Stromkreis maximal ist. Wie nennt man dieses Phänomen allgemein?



Aufgabe 6: Relativitätstheorie

Ein utopisches Raumschiff der Masse m = 20'000kg fliegt mit einer Geschwindigkeit von 0.95c an zwei relativ zueinander ruhenden Raumstationen A und B vorbei. In dem Moment, wo das Raumschiff an der Raumstation A vorbeifliegt, zeigen deren Uhr sowie die Uhr des Raumschiffs die Zeit 0.0s an. Die Uhr von Raumstation B sei zur Uhr von A synchronisiert. Im Raumschiff vergeht genau eine Sekunde nach dem Erreichen von Raumstation A, bis es Raumstation B erreicht.

a) Wie gross ist die Distanz der Raumstationen, vom Raumschiff aus betrachtet?

b) Wie gross ist die Distanz der Raumstationen für einen Beobachter auf einer der Raumstationen?

c) Welche Zeit zeigt die Uhr der Raumstation B an, wenn das Raumschiff an ihr vorbeifliegt?

d) Vom Raumschiff aus gesehen sollten die Uhren der Raumstationen langsamer gehen, von den Raumstationen aus gesehen jedoch diejenigen des Raumschiffes. Wie viel Zeit vergeht während dem Flug auf Raumstation B, vom Raumschiff aus betrachtet? Besteht ein Widerspruch zum Resultat von c)? Kommentieren Sie den Sachverhalt in zwei bis drei kurzen Sätzen.

e) Berechnen Sie die kinetische Energie des Raumschiffs.