

M a t h e m a t i k Grundlagen

Bemerkungen : Zeit : Drei Stunden
Formeln und Tafeln DMK/DPK
Taschenrechner TI83 beziehungsweise TI 89
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Eine Schar von Funktionen mit reellem Scharparameter a ist gegeben durch

$$f: x \rightarrow y = f(x) = \frac{a^2 x^2 + 1}{x}, \quad a > 0.$$

Es sei zunächst $a = 1$, also $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- Bestimmen Sie die Asymptoten und die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion und zeichnen Sie den Graphen (Hyperbel).
- Geben Sie die Gleichung der Tangente, die die Kurve in $B(2 / ?)$ berührt, an.
- Welcher Punkt des Graphen liegt im ersten Quadranten am nächsten beim Ursprung O des Koordinatensystems ?

Im Folgenden ist der Scharparameter a variabel.

- Notieren Sie die Gleichung der schiefen Asymptote sowie die Koordinaten des Tiefpunktes T in Abhängigkeit von a .
- Bestimmen Sie den Abstand des Tiefpunktes T zum Koordinatenursprung O in Abhängigkeit von a . Für welchen Wert des Parameters a ist dieser Abstand extremal ? Von welcher Art ist dieses Extremum ?

2. Es werden zwei Würfel, ein idealer und ein gezinkter, miteinander geworfen.
Für den gezinkten Würfel sind $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1/6$ und $P(5) = 1/4$.
Kontrollieren Sie: $P(6) = 1/12$.

- Zeigen Sie, dass die Augensumme 7 mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ erscheint.
- Die beiden Würfel werden nun in einer Serie von 20 Würfeln geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 7 genau zweimal erscheint ?
- Wie oft müssen die beiden Würfel geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal die Augensumme 7 auftritt, 99% übersteigt ?
- Wie wahrscheinlich ist, dass bei einem Wurf mindestens einer der Würfel 4 Augen zeigt ?
- Jemand wählt einen der beiden Würfel zufällig aus und wirft eine 5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um den gezinkten Würfel ?
- Die Summe der Augenzahlen beschreibt eine Zufallsvariable X . Notieren Sie die Verteilung von X : Geben Sie die möglichen Augensummen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.
- Welches ist der Erwartungswert von X ?

3. Gegeben sind die beiden schneidenden Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$$h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden.
- Welchen Winkel schliessen die beiden Geraden g und h ein ?
- Die beiden Geraden g und h legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie die Parameter- und die Koordinatengleichung dieser Ebene.
- Zeigen Sie, dass die Gerade n durch die beiden Punkte P(2|1|-2) und Q(3|-1|-4) senkrecht zur Ebene E steht und die Gerade g schneidet.

4. Wir betrachten die Funktion $f : x \rightarrow f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$ mit positivem Parameter a.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}(a - x^2)^{\frac{3}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist.
- Der Graph von f schliesst mit der x-Achse im 1. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses endlichen Flächenstückes, in Abhängigkeit vom Parameter a.
- Das Flächenstück der Aufgabe b) wird um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a.
- Um den Rotationskörper von Aufgabe c) wird nun ein gerader Kreiszyylinder so umbeschrieben, dass seine Mantellinien parallel zur x-Achse sind. Zeigen Sie, dass das Verhältnis des Volumens des Zylinders und des Rotationskörpers nicht vom Parameter a abhängt und geben Sie dieses Verhältnis an.

5. Gegeben sind die Gerade $g: y = \frac{7}{4}x$ und der Kreis $k: x^2 + y^2 - 20x - 40y + 460 = 0$.

- Bestimmen Sie Mittelpunkt M und Radius R von k.
- Die Gerade g schneidet k in zwei Punkten. Wie heissen die Koordinaten des näher beim Ursprung liegenden Schnittpunktes?
- Wie lautet die Gleichung der Tangente t an k in B(8/14) ?
- Berechnen Sie den Winkel zwischen g und t.
- g wird nun an t gespiegelt und erzeugt so die gespiegelte Gerade g*. Wie heisst die Gleichung von g*?