

**Lösung der Aufgabe 1:**

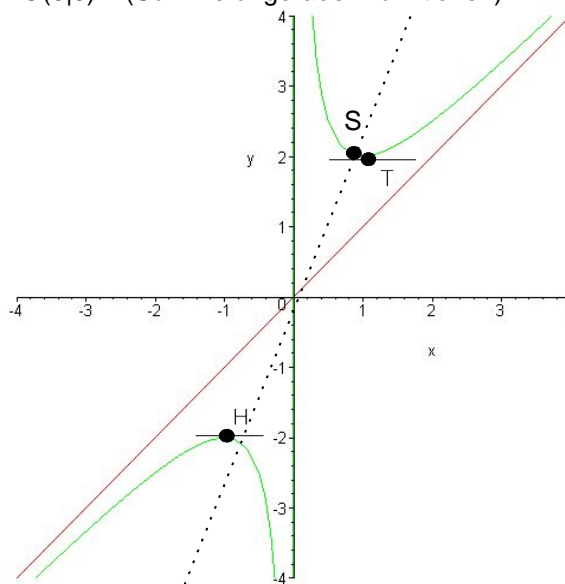
a)  $y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$       Symmetrie bezüglich O(0|0)      (Summe ungerader Funktionen)

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Asymptoten :      vertikal  $x = 0$   
                            schief  $y = x$

Extremalstellen :  $x = \pm 1, y = \pm 2$

H (-1 | -2), T (1 | 2)



b)  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$   
 $y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot (x - 2)$

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

Tangente

c) Abstand  $\overline{OP} = d$

$$d^2 = x^2 + \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 = \frac{2x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}$$

$$(d^2)' = \frac{(8x^3 + 4x) \cdot x^2 - (2x^4 + 2x^2 + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^4 - 2}{x^3}$$

Extremalstellen :  $4x^4 - 2 = 0, \quad x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad \text{Scheitel S} \quad x_S = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; y_S = \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$   
also  $\approx \underline{\underline{S(0.84 | 2.63)}}$

d)  $y = f(x) = \frac{a^2x^2 + 1}{x} = a^2x + \frac{1}{x}$       schiefe Asymptote  $y = a^2x$

$$f'(x) = a^2 - \frac{1}{x^2}$$

Tiefpunkt T, wenn  $a^2 - \frac{1}{x^2} = 0$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{a}$$

$$x_T = \frac{1}{a}; y_T = 2a$$

e) Abstand  $\overline{OT} = e$

$$e^2 = \frac{1}{a^2} + 4a^2$$

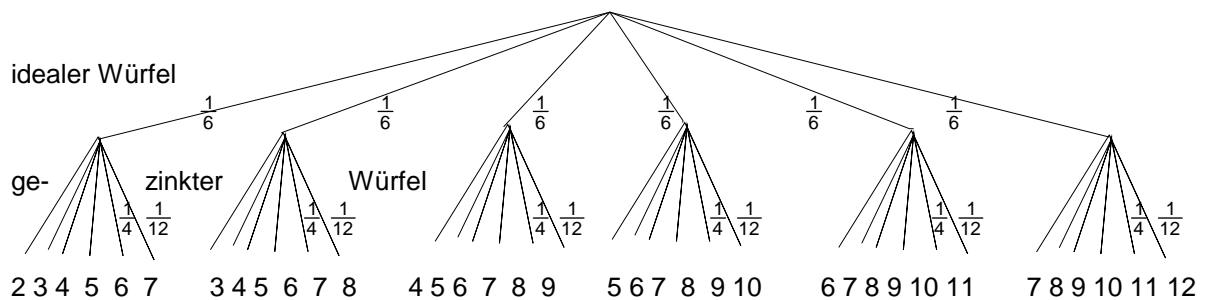
$$\frac{d}{da} e^2 = \frac{-2}{a^3} + 8a$$

$$\frac{d^2}{da^2} e^2 = \frac{6}{a^4} + 8 > 0$$

Extremalstelle :  $\frac{2}{a^3} = 8a, \text{ also } a^4 = \frac{1}{4} \quad \text{Extremaler Tiefpunkt für } a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Das Minimum beträgt  $e_{\text{Min}} = \sqrt{2,5}$

**Lösung der Aufgabe 2:**



$$P(6) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12-8-3}{12} = \frac{1}{12}$$

a)  $P(\Sigma = 7) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+3+8}{72} = \frac{1}{6}$

b) Anzahl Augensumme 7 ist binomial verteilt

$$n = 20, p = \frac{1}{6} \quad P_{20}(2) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} = 0.198$$

c) Gegenereignis : in n Würfeln nie Summe 7 werfen

$$P_n(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.01$$

$$n \cdot \lg \frac{5}{6} < \lg 0.01 = -2$$

$$n > \frac{-2}{\lg \frac{5}{6}} \approx 25.3 \quad \text{es sind mindestens 26 Würfe nötig}$$

d)  $P(\text{I zeigt 4, II zeigt 4}) = P(\text{I zeigt 4}) + P(\text{II zeigt 4}) - P(\text{I zeigt 4} \cap \text{II zeigt 4}) =$   
 $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \approx 0.3055$

e) Bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(\text{gezinkt} | 5) = \frac{P(5 \cap \text{gezinkt})}{P(5)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{5}$

f)

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36} + \frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{72} + \frac{1}{24} + \frac{3}{36}$	$\frac{1}{72} + \frac{1}{24} + \frac{2}{36}$	$\frac{1}{72} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36}$	$\frac{1}{72} + \frac{1}{24}$	$\frac{1}{72}$
$p_i$	$\frac{2}{72}$	$\frac{4}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{8}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{12}{72}$	$\frac{10}{72}$	$\frac{8}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{4}{72}$	$\frac{1}{72}$

g)  $E(X) = \sum x_i p_i = \frac{1}{72} \cdot (2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 12 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 11 \cdot 4 + 12 \cdot 1) =$   
 $= \frac{1}{72} \cdot (4 + 12 + 24 + 40 + 66 + 84 + 80 + 72 + 60 + 44 + 12) = \frac{83}{12} \approx 6.92$

**Lösung der Aufgabe 3 :**

a) Gleichsetzen der Ortsvektoren für den Schnittpunkt S :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} 1 + 2t = 5 + 2t' \\ -3 + 2t = -5 \\ -3 - t = 1 + t' \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man  $t' = -3$ , was mit der Gleichung von h sofort den Schnittpunkt ergibt :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ also } \underline{S(-1|-5|-2)}.$$

[ für den Parameter t erhält man durch Einsetzen in der der 1. oder 3. Gleichung :  $t = -1$  ]

b) Winkel  $\alpha$  zwischen den Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  der beiden Geraden :

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0 + 1^2}} = \frac{4 - 1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ also ist } \underline{\alpha = 63,4349\dots}$$

c) Anfangspunkt (Aufpunkt) von g als Anfangspunkt der Ebene E wählen :

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = 1 + 2u + 2v \\ y = -3 + 2u \\ z = -3 - u + v \end{cases}$$

Kombination der 1. und 3. Gleichung liefert  $x - 2y = 7 + 4u$   
2. Gleichung  $z = -3 + 2u$

Die Elimination von u ergibt  $x - 2y - 2z = 13$  oder  $\underline{x - 2y - 2z - 13 = 0}$

d)  $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  steht senkrecht zur Ebene mit dem Normalenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Es ist  $n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Da g in der Ebene E liegt, ist der Schnittpunkt mit g auch

Durchstosspunkt D von n mit der Ebene E :  $(2 + t) - 2 \cdot (1 - 2t) - 2 \cdot (-2 - 2t) - 13 = 0$  für den Wert  $t = 1$ , also ist der Durchstosspunkt  $\underline{D(3|-1|-4) = Q}$

$$\text{und } \underline{Q \in g}, \text{ für } t = 1: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung der Aufgabe 4 :**

a) 
$$F'(x) = \left( -\frac{1}{3}(a-x^2)^{\frac{3}{2}} \right)' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(a-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = x\sqrt{a-x^2}$$

b) Inhalt  $A_1$  des Flächenstückes zwischen Kurve und x-Achse im 1. Quadranten:

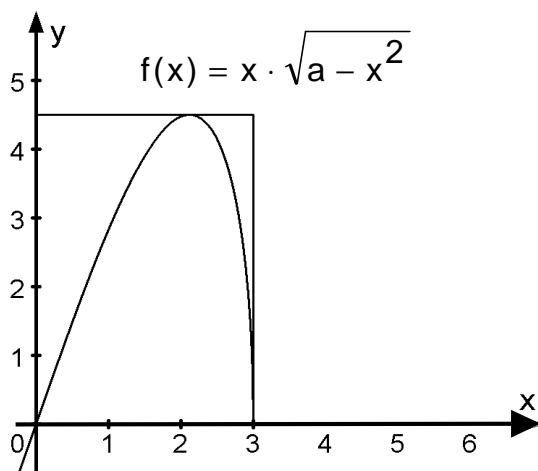
$$A_1 = \int_0^{\sqrt{a}} x\sqrt{a-x^2} dx = \left[ -\frac{1}{3}(a-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{a}} = -\frac{1}{3} \left[ (a-a)^{\frac{3}{2}} - (a-0)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

c) Nullstellen von  $f(x)$ :  $f(x) = x \cdot \sqrt{a-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}$

Volumen des Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} V_{\text{Rot}} &= \pi \int_0^{\sqrt{a}} (x\sqrt{a-x^2})^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{a}} x^2(a-x^2) dx = \pi \int_0^{\sqrt{a}} (ax^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{a}} = \pi \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{a^{\frac{1}{2}}} = \pi \left[ \frac{a^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{a^{\frac{5}{2}}}{5} - 0 \right] = \frac{2}{15} \pi a^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

d) Skizze für  $a = 9$  :



Maximum von  $f(x)$  im 1. Quadranten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{a-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}} = \sqrt{a-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a-x^2}} \\ &= \frac{a-x^2-x^2}{\sqrt{a-x^2}} = \frac{a-2x^2}{\sqrt{a-x^2}} \end{aligned}$$

Nullstellen von  $f'(x)$ :  $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a}$

Die positive Lösung ist die Maximalstelle von  $f(x)$  im 1. Quadranten.

Der Zylinder hat das Volumen  $V_{\text{Zyl}} = \pi r^2 h$  mit  $r = f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$  und  $h = \sqrt{a}$ .

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \sqrt{a - \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \sqrt{a - \frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3a}}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Zyl}} = \pi \left(\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)^2 \sqrt{a} = \frac{3\pi}{16} a^{\frac{5}{2}}$$

Volumen des Rotationskörpers von Aufg. c):  $V_{\text{Rot}} = \frac{2}{15} \pi a^{\frac{5}{2}}$

Verhältnis von  $V_{\text{Zyl}}$  zu  $V_{\text{Rot}}$  : 
$$\frac{V_{\text{Zyl}}}{V_{\text{Rot}}} = \frac{\frac{3\pi}{16} a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{15} \pi a^{\frac{5}{2}}} = \frac{15}{8}$$

Das Verhältnis ist tatsächlich nicht von  $a$  abhängig.

**Lösung der Aufgabe 5:**

a)  $k: x^2 - 20x + y^2 - 40y + 460 = 0$

$$(x-10)^2 + (y-20)^2 = 40$$

$$M(10|20), R = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

b)  $g \cap k = \{ B, C \}$

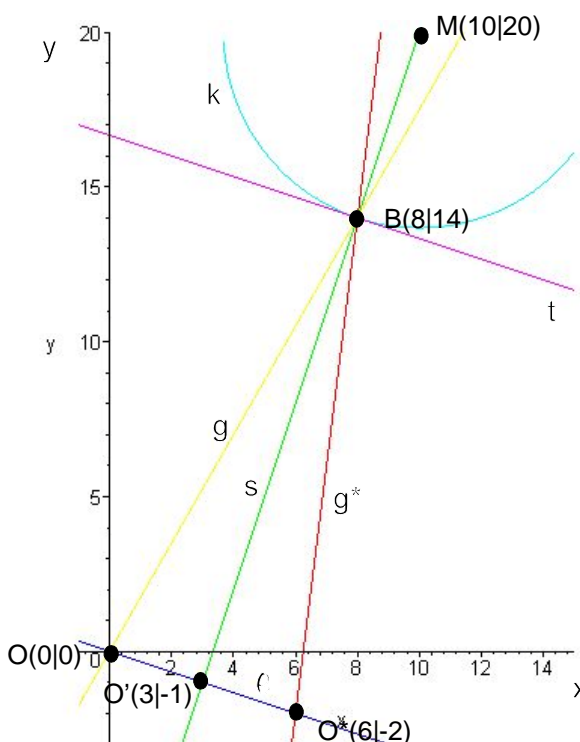
$$(x-10)^2 + \left(\frac{7}{4}x-20\right)^2 = 40$$

$$x^2 - 20x + 100 + \frac{49}{16}x^2 - 70x + 400 = 40$$

$$13x^2 - 288x + 1472 = 0$$

$$x_1 = 8, x_2 = \frac{184}{13} > 8$$

Da  $g$  durch  $(0|0)$  führt, ist  $B(8|14)$  näher beim Ursprung  $O(0|0)$ .



c) Steigung  $m_{(MB)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{2} = 3$ ; die Steigung der Tangente ist also  $m_t = -\frac{1}{3}$

$$t: y = -\frac{1}{3}x + q \quad B(8|14) \in t: 14 = -\frac{1}{3} \cdot 8 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{50}{3}$$

$$\text{also } t: y = -\frac{1}{3}x + \frac{50}{3} \quad \text{bzw. } x + 3y - 50 = 0$$

d)  $\varphi = \angle(g, t), \varphi < 90^\circ$

$$\tan \varphi = \left| \frac{-\frac{1}{3} - \frac{7}{4}}{1 - \frac{7}{12}} \right| = 5 \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 78.69^\circ$$

e)  $m$  sei die Steigung der gespiegelten Geraden  $g^*$

$$\varphi = \angle(g, t) = \angle(g^*, t): \quad 5 = \left| \frac{-\frac{1}{3} - m}{1 - \frac{1}{3}m} \right|$$

$$\text{I} \quad 5 - \frac{5m}{3} = -\frac{1}{3} - m \quad \Rightarrow \quad m = 8$$

$$\text{II} \quad -5 + \frac{5m}{3} = -\frac{1}{3} - m \quad \Rightarrow \quad m = m_g = \frac{7}{4}$$

$$\text{Also ist } g^*: y = 8x + q \quad B(8|14) \in g^* \quad \Rightarrow \quad q = -50$$

$$g^*: y = 8x - 50$$

Lösungsvariante: Über  $\{O'\} = s \cap \ell$  (siehe Figur),  $O'(3|-1) \Rightarrow O^*(6|-2)$