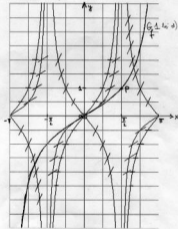


④ DGL: $y' \sin x + y \cos x = \sin x$ (*)

a) Wohlformular: $y' + k$ $y \cos x = \sin x (1-k)$
 $\cos x \neq 0$: $y = (1-k) \tan x$ |
 $k=0$: $y = \tan x$
 $k=0.5$: $y = \frac{1}{2} \tan x$
 $k=2$: $y = -\tan x$ } 1 Probe 1



d) $y = f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ($f(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow C = 1$)

$$① \quad y' \sin x + y \cos x = \sin x \quad (*)$$

3 a) s. separates Blatt

b) Homogenes DGL: $y' \sin x = -y \cos x$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad |$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\underline{y = \frac{C}{\sin x}} \quad |$$

c) $y' \sin x = -y \cos x + \sin x \quad (**)$

Variation der Konstante: $y_0 = \frac{C(x)}{\sin x}$

$$\rightarrow \frac{C'(x) \sin x - C(x) \cos x}{\sin^2 x} \cdot \cancel{\sin x} = - \frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin x} + \sin x$$

$$C'(x) = \sin x$$

$$C(x) = -\cos x$$

$$\underline{y_0 = -\frac{\cos x}{\sin x}} \quad |$$

Lösungsgesamtheit:

$$\underline{y = \frac{C}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{C - \cos x}{\sin x}} \quad |$$

d) $f\left(\frac{\pi}{2} | 1\right) \in G_f: \quad 1 = \frac{C - 0}{1} \rightarrow C = 1$

$$\underline{y = f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}} \quad | \quad \text{Graph Gf: s. 1 separates Blatt}$$

Selbe Fortsetzung bei $x=0$?

Ne! l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \underline{0} \quad |$

Es ev. also die selbe Fortsetzung g von f bei 0, nämlich

$$\underline{g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}}$$

3

② Komplexe Funktionen: $w = f(z) = \frac{2z-i}{z} = 2 - \frac{i}{z}$

a) Definition $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ \checkmark

f^{-1} : $zw = z - i$
 $i = z(1-w)$

$w \neq 1$: $z = \frac{i}{1-w}$ \uparrow

Wertmenge $W = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ \checkmark

b) $k: |z| = 1$, $k' = f(k)$?

$\left| \frac{i}{1-w} \right| = \frac{1}{|1-w|} = 1 \quad \uparrow$

\rightarrow $k': |w-2| = 1$ \uparrow Kreis mit Mittelpunkt $M(2)$ und Radius 1

c) Umg. Kreis k' : $-w = \bar{w}$, $k = f^{-1}(k')$?

$-2 + \frac{i}{z} = 2 + \frac{i}{\bar{z}}$ \uparrow

$i\bar{z} = 4z\bar{z} + iz$

$z\bar{z} + \frac{1}{4}iz - \frac{1}{4}i\bar{z} = 0$

$(z - \frac{1}{4}i)(\bar{z} + \frac{1}{4}i) = \frac{1}{16}$

$k: |z - \frac{1}{4}i| = \frac{1}{4}$ \uparrow Kreis mit Mittelpunkt $z(\frac{1}{4}i)$ und Radius $\frac{1}{4}$

d) $g: (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0$, d.h. $g: y = x$, $g' = \{g\}'$?

$(1+i)\frac{i}{2w} + (1-i)\frac{-i}{2-w} = 0 \quad \uparrow$

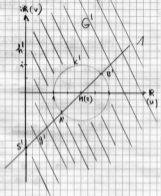
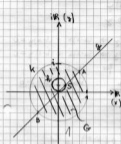
$(i-1)(2-w) + (-i-1)(2-w) = 0$

$g': (1+i)w + (1-i)\bar{w} - 4 = 0$ \uparrow

kw. $u-v + u-v - 4 = 0$

$g': v = u - 2$

Teambewertung (2 d)



3a) Gleichung der Kurven, die jede Kurve mit Gf.

$$x^2 + 4y^2 = a^2 \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{nicht-wählbar, nicht-wählbar.}$$

Gegeben Kurven sind Ellipsen mit Halbachsen a und $\frac{a}{2}$.

In jedem Schnittpunkt $P(x|y)$ der Ellipse und der
gesuchten Kurve mit Gf. $y = f(x)$ gilt

$$\frac{y'}{y} \cdot y'' = -1 \quad \text{①}$$

für y'' : $x^2 + 4 \cdot 2y \cdot y' \cdot y'' = 0$

$$\rightarrow (y \neq 0) \quad y'' = -\frac{x}{4y}$$

$$\xrightarrow{\text{①}} (x \neq 0) \quad \underline{y' = \frac{4y}{x}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Dgl für gesucht} \\ \text{Funktions} \end{array} \right.$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 4 \cdot \ln|x| + \ln|C|$$

$$\underline{y = Cx^4}$$

Lösung:	I	$x = 0$	y -Achse schneidet alle Ellipsen senkrecht
	II	$y = 0$	(C=0) x -Achse = = = =
	III	$y = Cx^4$	(C ≠ 0)

③ b) Affine Abbildung: (also $a \neq 0$)

$$f: \begin{aligned} x' &= ax + (1-a)y \\ y' &= (a-1)x + by \end{aligned}$$

parallel zu affix? $x = ax + (1-a)y \rightarrow (a-1)x + (1-a)y = 0$
 $y = (a-1)x + by \rightarrow (a-1)x + (b-1)y = 0$

Es ex. Affinitätsachse s für $1-a = b-1$,
 also für $b = 2-a$ bzw. $a = 2-b$

Fallunterscheidung

$a \neq 1$: $s: y = x$

Aff. Abbildung $r \parallel \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow f$ ist Scherung

\rightarrow Aff. Verhältnis $k = a = 1$

$a = 1$:

$$x' = x$$

$$y' = by$$

$\Delta = b \neq 0$ (da affine Abb.)

$b = 1$: $f = I$ (Identität)

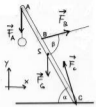
$b \neq 1$: $s: y = 0$ (v-Achse)

$$r \parallel \begin{pmatrix} a \\ b-1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

f ist normale Affinität

Aufg. 4

a)



$\alpha = 62^\circ$
 $\beta = 76^\circ$

2

b) $F_A = 136 \text{ N}$, $F_G = 434 \text{ N}$, $l_A = 3 \text{ m}$, $l_B = 2 \text{ m}$

Drehmomente bezüglich C:

$$F_A \cdot l_A \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + F_G \cdot \frac{l_A}{2} \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = F_B \cdot l_B \cdot \sin \beta$$

$$(F_A + \frac{F_G}{2}) \cdot l_A \cdot \cos \alpha = F_B \cdot l_B \cdot \sin \beta$$

$$\rightarrow F_B = \frac{(F_A + \frac{F_G}{2}) \cdot l_A \cdot \cos \alpha}{l_B \cdot \sin \beta} = \underline{\underline{320 \text{ N}}}$$

2

c) $F_{Bx} = F_B \cdot \cos(\beta - \alpha) = 344 \text{ N}$

$$\rightarrow |F_{cx}| = |F_{Bx}| = 344 \text{ N}$$

$$F_{By} = F_B \cdot \sin(\beta - \alpha) = 77.5 \text{ N}$$

$$F_{cy} + F_{By} = F_A + F_G$$

$$\rightarrow F_{cy} = F_A + F_G - F_{By} = 640 \text{ N}$$

$$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = \underline{\underline{684 \text{ N}}}$$

$$\tan \gamma = \frac{F_{cy}}{|F_{cx}|} = 1.96 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 63.0^\circ}}$$



SP

Aufg. 5

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$\text{Differentialgleichung: } m\ddot{s} = -k\dot{s} - mg$$

$$\text{mit } v = \dot{s}: m\dot{v} = -kv - mg$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } s(0) = 0 \text{ m, } \dot{s}(0) = v(0) = v_0 = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v - g \quad \text{mit } \frac{k}{m} = 0,8 \text{ s}^{-1} \quad 1$$

$$\rightarrow \dot{v} = -0,8v - 10 \quad (\text{I}) \quad \text{inhomogene DGL.}$$

$$\dot{v} = -0,8v \quad (\text{H}) \quad \text{zugehörige homogene DGL}$$

$$\text{allg. Lsg. von (H): } v = v^* \cdot e^{-0,8 \cdot t} \quad (v^*: \text{Integr.konst.})$$

$$\text{Ansatz part. Lsg. von (I): } v = \text{konst.}, \dot{v} = 0$$

$$\rightarrow 0 = -0,8v - 10 \Rightarrow v = -12,5$$

$$\text{allg. Lsg. von (I): } v = \underline{v^* \cdot e^{-0,8t} - 12,5} \quad 3$$

$$\text{Anfangsbedingung: } v(0) = 7,5 = v^* - 12,5$$

$$\rightarrow v^* = 20$$

$$\rightarrow \text{Lösung: } \underline{v = 20 \cdot e^{-0,8t} - 12,5} \quad 1$$

$$s(t) = \int v dt = -25 \cdot e^{-0,8t} - 12,5 \cdot t + s^* \quad 1$$

$$s(0) = 0: \quad 0 = -25 + s^* \Rightarrow s^* = 25$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{s(t) = -25 \cdot e^{-0,8 \cdot t} - 12,5 \cdot t + 25}} \quad 1$$

$$s(1,5 \text{ s}) = \underline{\underline{-1,28 \text{ m}}} \quad 1$$

Aufg. 6

$v = 0,7c \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,7^2}} = 1,40$ 1

a) x in Lichtsekunden (L_s) $\rightarrow c = 1 \frac{L_s}{s}, v = 0,7 \frac{L_s}{s}$

$S: x_B = \underline{50 L_s}, t_B = \frac{x_B}{v} = \underline{71,4 s}$

$S': x'_B = \underline{0 L_s}, t'_B = \gamma(t_B - \frac{v x_B}{c^2}) = \underline{51 s}$
 $(= \frac{t_B}{\gamma})$ 3

b) In S : Lichtblitz wurde $50 s$ vor Ereignis B ausgelöst, also:

$S: x_c = \underline{0 L_s}, t_c = \underline{21,4 s}$

$S': x'_c = \gamma(x_c - vt_c) = \underline{-21,0 L_s}$

$t'_c = \gamma(t_c - \frac{v x_c}{c^2}) = \underline{30,0 s}$ 4

Aufg. 7

$$f = 600 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi f = 3770 \text{ s}^{-1}$$

$$Z_L = i\omega L = i \cdot 37,7 \Omega \quad 1$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -i \cdot 132,6 \Omega \quad 1$$

$$Z_{R_2L} = R_2 + Z_L = 20 \Omega + i \cdot 37,7 \Omega \quad 1$$

$$Z_{CR_2L} = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{R_2L}}} = 37,4 \Omega + i \cdot 64,8 \Omega \quad (\text{TI-82}) \quad 1$$

$$Z = Z_{R_1, CR_2L} = R_1 + Z_{CR_2L} = 67,4 \Omega + i \cdot 64,8 \Omega \quad 1$$

$$\Rightarrow \underline{|Z| = 80,9 \Omega}, \quad \underline{\varphi = 33,6^\circ} \quad 1$$

6 P

$$\text{formal: } Z = R_1 + \frac{i\omega L + R_2}{1 + i\omega C(i\omega L + R_2)}$$