

## Lösungen

### Aufgabe 1 (10 Punkte):

$$\text{a) } f(z) = \frac{-5+10i}{z} + 2 \quad \text{Nullstellen: } \frac{-5+10i}{z} + 2 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{5-10i}{z} \Rightarrow \underline{z} = \frac{5-10i}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2} - 5i}}$$

$$\text{Fixpunkte: } \frac{-5+10i}{z} + 2 = z \Rightarrow -5 + 10i + 2z = z^2 \Rightarrow z^2 - 2z + 5 - 10i = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4(5 - 10i) = 4 - 20 + 40i = -16 + 40i = 8(-2 + 5i) \Rightarrow |D| = 8\sqrt{(-2)^2 + 5^2} = 8\sqrt{29}$$

$$D \text{ liegt im 2. Quadranten} \Rightarrow \varphi = \arg(D) = 180^\circ + \arctan\left(-\frac{5}{2}\right) \cong 180^\circ - 68.20^\circ = 111.80^\circ$$

$$\Rightarrow D = 8\sqrt{29}e^{i111.80^\circ} = d_0^2$$

$$d_0 = \sqrt{8\sqrt{29}e^{i\frac{111.80^\circ}{2}}} = \sqrt{8\sqrt{29}e^{i55.90^\circ}} = \sqrt{8\sqrt{29}}(\cos(55.90^\circ) + i\sin(55.90^\circ)) \cong 3.6798 + 5.4351i$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{2 \pm d_0}{2} \cong 1 \pm \frac{3.6798 + 5.4351i}{2} = 1 \pm (1.8399 + 2.7176i)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z_1 \cong -0.8399 + 2.7176i}}; \underline{\underline{z_2 \cong 2.8399 - 2.7176i}}$$

$$h(z) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 + 2i \quad \text{Nullstellen: } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 + 2i = 0$$

$$\Rightarrow \underline{z} = -\frac{1+2i}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i} = -4\frac{1+2i}{1-2i} = -4\frac{(1+2i)^2}{1^2 + 2^2} = -4\frac{-3+4i}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{5}(3-4i)}}$$

$$\text{Fixpunkte: } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 + 2i = z \Rightarrow \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 + 2i = 0$$

$$\Rightarrow \underline{z} = -\frac{1+2i}{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i} = 4\frac{1+2i}{3+2i} = -4\frac{(1+2i)(3-2i)}{3^2 + 2^2} = 4\frac{7+4i}{13} = \underline{\underline{\frac{4}{13}(7+4i)}}$$

$$\text{b) } f(z) = h(z) \Rightarrow \frac{-5+10i}{z} + 2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 + 2i \Rightarrow -5 + 10i + 2z = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)z^2 + (1+2i)z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)z^2 + (-1+2i)z + 5 - 10i = 0$$

$$D = (-1+2i)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)(5-10i) = (-1+2i)^2 + (-1+2i)(5-10i) = (-1+2i)^2 - 5(-1+2i)(-1+2i)$$

$$= -4(-1+2i)^2 = -4(-3-4i) = 4(3+4i) \Rightarrow |D| = 4\sqrt{3^2 + 4^2} = 4 \cdot 5 = 20$$

$$D \text{ liegt im 1. Quadranten} \Rightarrow \varphi = \arg(D) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53.13^\circ$$

$$\Rightarrow D = 20e^{i53.13^\circ} = d^2 \Rightarrow d_0 = \sqrt{20}e^{i\frac{53.13^\circ}{2}} = 2\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{53.13^\circ}{2}\right) + i\sin\left(\frac{53.13^\circ}{2}\right)\right) = 4 + 2i$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{-(-1+2i) \pm d_0}{2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)} = 2\frac{1-2i \pm (4+2i)}{1-2i} = 2\left(1 \pm 2\frac{2+i}{1-2i}\right) = 2\left(1 \pm 2\frac{(2+i)(1+2i)}{1^2 + 2^2}\right)$$

$$= 2\left(1 \pm 2\frac{0+5i}{1^2 + 2^2}\right) = 2(1 \pm 2i) \Rightarrow \underline{\underline{z_1 = 2 + 4i}}; \underline{\underline{z_2 = 2 - 4i}}$$

c)  $z_1 = 2 + 4i$ ;  $z_2 = 2 - 4i$

g:  $\text{Re}(z) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 2 \Rightarrow z + \bar{z} - 4 = 0$

f(g):  $f(z) = \frac{-5+10i}{z} + 2 = w \Rightarrow z = \frac{-5+10i}{w-2}$  und  $\bar{z} = \frac{-5-10i}{\bar{w}-2}$

$\xrightarrow{g}$   $\frac{-5+10i}{w-2} + \frac{-5-10i}{\bar{w}-2} - 4 = 0 \quad | \cdot (w-2)(\bar{w}-2)$

$\Rightarrow (-5+10i)(\bar{w}-2) + (-5-10i)(w-2) - 4(w-2)(\bar{w}-2) = 0$

$\Rightarrow (-5+10i)\bar{w} + 10 - 20i + (-5-10i)w + 10 + 20i - 4w\bar{w} + 8\bar{w} + 8w - 16 = 0$

$\Rightarrow -4w\bar{w} + (3+10i)\bar{w} + (3-10i)w + 4 = 0 \Rightarrow w\bar{w} - \frac{1}{4}(3+10i)\bar{w} - \frac{1}{4}(3-10i)w - 1 = 0$

$\Rightarrow (w - \frac{1}{4}(3+10i))(\bar{w} - \frac{1}{4}(3-10i)) - \frac{(3+10i)(3-10i)}{16} - 1 = 0$

$\Rightarrow (w - \frac{1}{4}(3+10i))(\bar{w} - \frac{1}{4}(3-10i)) - \frac{109}{16} - 1 = 0 \Rightarrow (w - \frac{1}{4}(3+10i))(\bar{w} - \frac{1}{4}(3-10i)) = \frac{125}{16}$

$\Rightarrow |w - \frac{1}{4}(3+10i)|^2 = \frac{125}{16} \Rightarrow |w - \frac{1}{4}(3+10i)| = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{5}$

f(g) ist ein Kreis mit Mittelpunkt bei  $m = \frac{1}{4}(3+10i)$  und Radius  $\frac{5}{4}\sqrt{5}$ .

### Aufgabe 2 (10 Punkte):

a) Der Mittelpunkt M von k liegt vertikal über  $N(40|12|0)$ ,  $\overline{NM}$  beträgt 15.

$\Rightarrow M(40|12|15)$

Radius von k:  $r = \overline{MA} = \sqrt{(40-40)^2 + (15-12)^2 + (11-15)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Gleichung von k:  $\underline{\underline{(x-40)^2 + (y-12)^2 + (z-15)^2 = 5^2 = 25}}$

b) Gleichung des Lichtstrahls g:

$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{LA} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g \cap k: \Rightarrow (40-40)^2 + (15-3t-12)^2 + (11-t-15)^2 = 25 \Rightarrow (3-3t)^2 + (-4-t)^2 = 25$

$\Rightarrow 9-18t+9t^2+16+8t+t^2=25 \Rightarrow 10t^2-10t=0 \Rightarrow 10t(t-1)=0 \Rightarrow t_1=0; t_2=1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B(40|12|10)}}$

c) Spiegelung von z.B. Punkt L an Tangentialebene  $\tau$  zu k durch A:

$\vec{n}_\tau = \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau: 3y - 4z + d = 0; A(40|15|11) \in \tau \Rightarrow 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

$\Rightarrow \tau: 3y - 4z - 1 = 0; \text{ Normale } n \text{ zu } \tau \text{ durch } L: n: \vec{r} = \overrightarrow{OL} + t\vec{n}_\tau = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 26 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt F von  $n$  und  $\tau$ :  $3 \cdot (60 + 3t) - 4 \cdot (26 - 4t) - 1 = 0$

$$\Rightarrow 180 + 9t - 104 + 16t - 1 = 0 \Rightarrow 25t + 75 = 0 \Rightarrow t = -3$$

$$\Rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 26 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 51 \\ 38 \end{pmatrix} \Rightarrow F(40|51|38) \Rightarrow \vec{OL}' = \vec{OL} + 2\vec{LF} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 26 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 42 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L'(40|42|50)$$

Gleichung der gespiegelten Gerade  $g'$  (reflektierter Teilstrahl):

$$\underline{\underline{g'}}: \vec{r} = \vec{OA} + t\vec{L'A} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -27 \\ -39 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

d)  $g': \vec{r} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix}$ ; Gleichung der  $xy$ -Ebene:  $z = 0$

Schnittpunkt S von  $g'$  mit der  $xy$ -Ebene:  $11 - 13t = 0 \Rightarrow t = \frac{11}{13}$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{11}{13} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 - \frac{99}{13} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ \frac{96}{13} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(40|\frac{96}{13}|0)}}$$

Abstand  $e$  von S zu  $\tau: 3y - 4z - 1 = 0$ : HNF von  $\tau$ :  $H_\tau(x, y, z) = \frac{3y - 4z - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3y - 4z - 1}{5}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e}} = \left| H_\tau\left(40, \frac{96}{13}, 0\right) \right| = \left| \frac{3 \cdot \frac{96}{13} - 4 \cdot 0 - 1}{5} \right| = \left| \frac{\frac{288}{13} - 1}{5} \right| = \frac{275}{65} = \underline{\underline{\frac{55}{13}}}$$

### Aufgabe 3 (10 Punkte):

a)  $y'' + 4y' = 3e^{-3x} - 8y \Rightarrow y'' + 4y' + 8y = 3e^{-3x}$

homogene DGL:  $y'' + 4y' + 8y = 0$

$\Rightarrow$  charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 8 = -16 < 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

$$\Rightarrow y_H = e^{-2x} (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

partikuläre Lösung: Ansatz  $y_p = ke^{-3x}$  ( $y_p \notin y_H$ )

$$\stackrel{\text{DGL}}{\Rightarrow} (-3)^2 ke^{-3x} + 4(-3)ke^{-3x} + 8ke^{-3x} = 3e^{-3x} \Rightarrow 9ke^{-3x} - 12ke^{-3x} + 8ke^{-3x} = 3e^{-3x}$$

$$\Rightarrow (9 - 12 + 8)k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{5} \Rightarrow y_p = \frac{3}{5}e^{-3x}$$

allgemeine Lösung:  $y = y_H + y_p = e^{-2x} (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)) + \frac{3}{5}e^{-3x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{b) } \int \frac{\cos(\sqrt{x^3 + \pi}) \cdot x}{\sqrt{x}} dx = \int \cos(\sqrt{x^3 + \pi}) \sqrt{x} dx \quad (x > 0)$$

Substitution:

$$u(x) = \sqrt{x^3 + \pi} \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = (\sqrt{x^3 + \pi})' = \left(x^{\frac{3}{2}} + \pi\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{3}{2} \sqrt{x} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \cos(\sqrt{x^3 + \pi}) \sqrt{x} dx &= \frac{2}{3} \int \cos(\sqrt{x^3 + \pi}) \frac{3}{2} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \int \cos(u) du = \frac{2}{3} \sin(u) + C \\ &= \frac{2}{3} \sin(\sqrt{x^3 + \pi}) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^4 \frac{\cos(\sqrt{x^3 + \pi}) \cdot x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{3} \left[ \sin(\sqrt{x^3 + \pi}) \right]_1^4 = \frac{2}{3} (\sin(\sqrt{64 + \pi}) - \sin(\sqrt{1 + \pi})) \\ &= \frac{2}{3} (\sin(8 + \pi) - \sin(1 + \pi)) \cong \underline{\underline{-0.0986}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i; \text{ Koeffizientenfolge: } a_i = 1 \quad \forall i$$

z.B. mit Wurzelkriterium:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{a_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{1} = \lim_{i \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow \text{Konvergenzradius } R=1$

$\Rightarrow h(x)$  konvergiert für  $|1-x| < 1 \Leftrightarrow x \in ]0;2[$

(Ränder:  $x=0 \Rightarrow h(0) = \sum_{i=0}^{\infty} 1^i$  divergent;  $x=2 \Rightarrow h(2) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$  nicht konvergent)  $\Rightarrow \underline{\underline{ID = ]0;2[}}$

Taylor-Entwicklung von  $f(x) = \frac{1}{x}$  bei  $x_0 = 1$ :

$$f(x) = x^{-1}; f'(x) = -x^{-2}; f''(x) = 2x^{-3}; f'''(x) = -2 \cdot 3 \cdot x^{-4}; \dots$$

$$\Rightarrow f^{(i)}(x) = (-1)^i \cdot i! \cdot x^{-(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow f^{(i)}(1) = (-1)^i \cdot i! \cdot 1^{-(i+1)} = (-1)^i \cdot i!, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow$  Taylor-Reihe  $p(x)$  existiert:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(1)}{i!} (x-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i!}{i!} (x-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i$$

$\Rightarrow p(x)$  stimmt mit  $h(x)$  überein.

Da das Restglied für alle  $x \in \text{ID}$  gegen 0 konvergiert, konvergiert auch die Taylor-Reihe  $p(x)$

$$(\Rightarrow h(x)) \text{ für alle } x \in \text{ID} \text{ gegen } f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i \quad \forall x \in ]0;2[$$

**Aufgabe 4 (10 Punkte):**  
**Der „kleine Prinz“: Gravitation, Rotation**

$$a) F_{Grav} = G \cdot \frac{m_{Prinz} \cdot m_{Planet}}{(r+h)^2} = 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

$$b) E_{kin} + E_{pot}(h_1) = E_{pot}(h_2)$$

$$\frac{1}{2} m_{Prinz} v^2 - G \cdot \frac{m_{Prinz} \cdot m_{Planet}}{(r+h_1)} = -G \cdot \frac{m_{Prinz} \cdot m_{Planet}}{(r+h_2)}$$

$$v = \sqrt{2G \cdot m_{Planet} \left( \frac{1}{(r+h_1)} - \frac{1}{(r+h_2)} \right)} = 9.9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c) E_{kin}(h=0) + E_{pot}(h=0) = E_{kin}(h \rightarrow \infty) + E_{pot}(h \rightarrow \infty)$$

$$\frac{1}{2} m_{Körper} v_{Flucht}^2 - G \cdot \frac{m_{Körper} \cdot m_{Planet}}{r} = 0 + 0$$

$$v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2G \cdot m_{Planet}}{r}} = 3.7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Fluchtgeschwindigkeit ist knapp viermal so gross wie die Absprunggeschwindigkeit aus b).

$$d) \text{ Drehimpuls: } L = J \cdot \omega$$

$$\text{Rotationsenergie: } E_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$$\text{mit dem Trägheitsmoment (volle Kugel): } J = \frac{2}{5} m \cdot r^2 = 6.9 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{und der Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2.4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow L = 17 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \text{ und } E_{rot} = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

e) Beim Aufstehen vergrössert sich das Trägheitsmoment. Da der Drehimpuls erhalten bleibt, muss die Drehfrequenz kleiner werden (allerdings wegen des grossen Massenunterschieds zwischen Prinz und Planet kaum merklich).

### Aufgabe 5 (10 Punkte): Reale Spule: Wechselstrom, Differentialgleichungen

a)  $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = 500\Omega$  Gesamtimpedanz

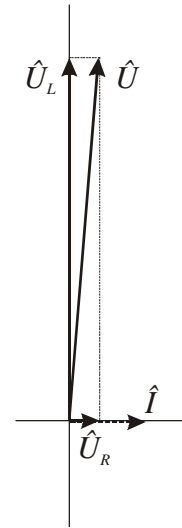
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \Rightarrow X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 498\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = 1.59\text{H}$$

b)  $\tan \Delta\varphi = \frac{X_L}{R} = 12.46 \Rightarrow \Delta\varphi = 85.4^\circ$

(Spitzenwerte von Spannung und Strom:  $\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} = 14.1\text{V}$ ,

$$\hat{I} = \sqrt{2} \cdot I_{eff} = 28.2\text{mA}$$
)



c) Maschenregel:  $U_Q = U_L + U_R$

$$U_Q = L \cdot \dot{I} + R \cdot I$$

bzw.:  $\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I + \frac{U_Q}{L}$  inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

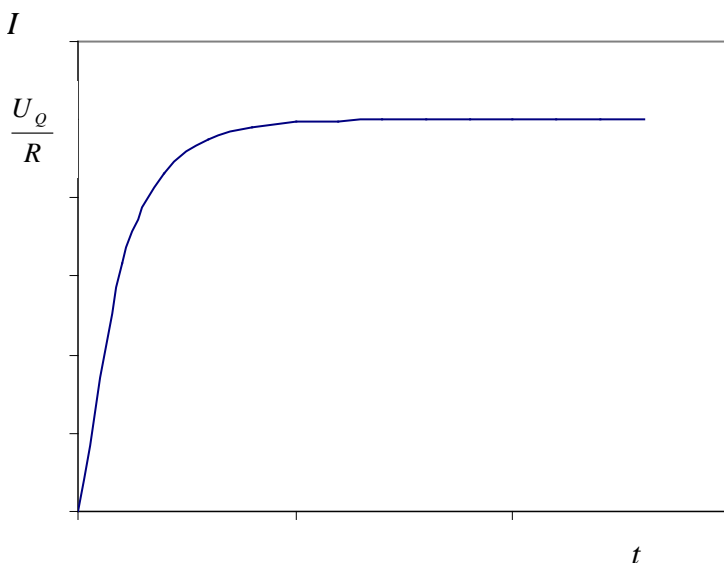
allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I$ :

$$I(t) = \tilde{I} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: für  $\dot{I} = 0$  ist  $I_p = \frac{U_Q}{R} = \text{konst.}$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:  $I(t) = \tilde{I} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_Q}{R}$

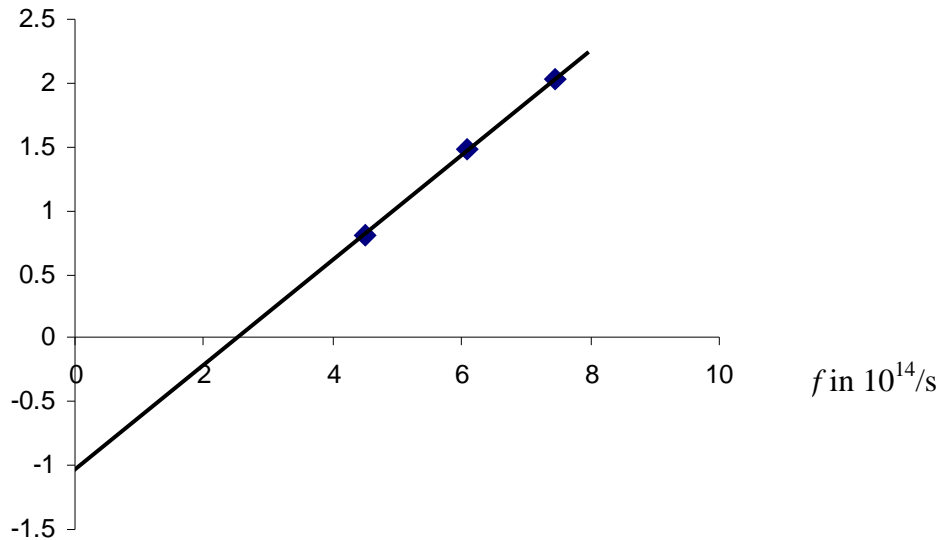
mit  $I(0) = \tilde{I} + \frac{U_Q}{R} = 0 \Rightarrow \tilde{I} = -\frac{U_Q}{R}$  ergibt sich als Lösung:  $I(t) = \frac{U_Q}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$



### Aufgabe 6 (10 Punkte): Wellen- und Teilchenaspekt von Licht und Materie

a)

$\lambda$ in nm	667.8	492.2	402.6
$f$ in 1/s	$4.492 \cdot 10^{14}$	$6.095 \cdot 10^{14}$	$7.452 \cdot 10^{14}$
$E_{kin,max}$ in J	$1.296 \cdot 10^{-19}$	$2.368 \cdot 10^{-19}$	$3.248 \cdot 10^{-19}$

 $E_{kin,max}$  in  $10^{-19}$ J

Es entsteht eine Gerade gemäss der Einstein-Gleichung  $E_{kin,max} = h \cdot f - W_A$

- Achsenabschnitt auf der  $E_{kin,max}$ -Achse:  $W_A = 1.66 \cdot 10^{-19}$  J entspricht der Ablösearbeit des Metalls
- Achsenabschnitt auf der  $f$ -Achse:  $f_{Grenz} = 2.52 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}$  entspricht der Grenzfrequenz für die Auslösung von Photoelektronen
- Steigung:  $\frac{\Delta E}{\Delta f} = 6.60 \cdot 10^{-34}$  Js entspricht der Planckschen Konstante  $h$  (Berechnung mit beliebigen Wertepaaren aus Graphik)

$$b) \lambda = \frac{h}{p}$$

$$E_{gesamt} = e \cdot U + E_0 = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{(e \cdot U + E_0)^2 - E_0^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{(e \cdot U + E_0)^2 - E_0^2}} = 5.3 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Abstand benachbarter Interferenzstreifen  $a_I$  am Schirm (Abstand  $l=35$  cm):

$$\tan \alpha_1 = \frac{a_1}{l} \approx \sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{g} \quad (\text{Kleinwinkelnäherung})$$

$$\Rightarrow a_1 = l \cdot \frac{\lambda}{g} = 9.3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

c) Heisenbergsche Unschärferelation mit der Ortsunschärfe  $\Delta x = 0.10$ mm

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x} = 1.1 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$