

M a t h e m a t i k Grundlagen

Bemerkungen Zeit : 180 Minuten.
Fundamentum Mathematik und Physik.
Taschenrechner TI 83 bzw. TI voyage200.
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 4 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$
 - a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Asymptoten und Extremalstellen.
Zeichnen Sie den Graphen von f . (Einheit $\hat{=} 1$ cm)
 - b) Zeigen Sie, dass $f''(x) = (x - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ ist.
Bestimmen Sie damit den Wendepunkt und finden Sie die Gleichung der Wendetangente. Unter welchem spitzen Winkel schneidet die Wendetangente die y -Achse ?
 - c) Beweisen Sie, dass $F : x \mapsto -8 \cdot (x + 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ eine Stammfunktion von f ist.
 - d) Der Graph von f , die x -Achse und die vertikale Gerade $x = a$ ($a > 0$) schliessen eine Fläche vom Inhalt $A(a)$ ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie den Grenzwert für $a \rightarrow \infty$.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-2|7|0)$, $B(5|3|-4)$ und $C(6|-1|4)$ einer Ebene $E = (ABC)$.
 - a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E .
 - b) Zeigen Sie, dass zwei Seiten des Dreiecks ABC die gleiche Länge s haben.
 - c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D in der Ebene E so, dass das Viereck $ABCD$ ein Rhombus – d.h. ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten – mit der Seitenlänge s ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M .
 - d) Ein Punkt $S(10|13|6)$ bildet zusammen mit dem Rhombus $ABCD$ eine Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S . Berechnen Sie den Fusspunkt F des Lotes von S auf die Ebene E .
 - e) Wie gross ist der Winkel der Pyramidenkante AS gegenüber der Grundfläche $ABCD$ der Pyramide ?
 - f) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide.

3. Die Parabel $p : y = 0.25 x^2 - 2x + 4$ sowie die Parabelpunkte $A(0|y_A)$ und $B(10|y_B)$ sind gegeben. Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B .
- Berechnen Sie den Inhalt des von der Parabel p und der Geraden g eingeschlossenen Flächenstücks.
 - Die Strecke AB rotiert um die x -Achse und erzeugt so den Mantel eines Rotationskörpers. Berechnen Sie sein Körpervolumen.
 - Der Punkt C liegt unterhalb der Strecke AB auf der Parabel p . Bestimmen Sie die Koordinaten von C so, dass sein Abstand zur Strecke AB maximal ist.
 - Ein von A ausgehender Lichtstrahl wird in B an der Parabel p reflektiert. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des reflektierten Lichtstrahls mit der y -Achse.
Hinweis : die Strecke AB wird an der Parabeltangente gespiegelt.

4. Auf einem Blumenmarkt werden Blumenzwiebeln von rot, gelb und weiss blühenden Tulpen verkauft.

Zunächst werden alle Tulpenzwiebeln miteinander vermischt, von jeder Sorte gleich viele. Man darf davon ausgehen, dass die Anzahl der Zwiebeln so gross ist, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Zwiebel einer bestimmten Farbe zu erhalten, konstant bleibt, auch wenn schon einige verkauft worden sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem Kauf von 12 Tulpenzwiebeln aus dieser Mischung

- genau eine rot blühende,
- wenigstens zwei gelb blühende,
- von jeder Sorte gleich viele erhält?

Ein Gärtner pflanzt 10 rot und 10 gelb blühende Zwiebeln in zwei unterschiedliche Reihen. Die vordere Reihe soll 8 Zwiebeln mit genau 3 gelb blühenden Zwiebeln enthalten und die hintere Reihe entsprechend 12 Zwiebeln mit genau 7 gelb blühenden.

- Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Bepflanzung gibt es?

Eine Zwiebel - unabhängig von der Farbe - kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% zur Blüte.

- Wie viele Zwiebeln müssen im Minimum gesetzt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine Zwiebel zur Blüte kommt?
- Jemand setzt 5 Zwiebeln. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Zwiebeln, die zur Blüte kommen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung dieser Zufallsvariablen.

5. Von einander unabhängige Kurzaufgaben

- Berechnen Sie x so, dass die aus zwei geometrischen Reihen zusammengesetzte nicht abbrechende Reihe $2 - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^3} + \dots - \dots + \dots - \dots$ den Summenwert 6 hat.

- Gegeben sind der Kreis $k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ sowie der Punkt $P(-3 | 11)$. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten von P an k .