KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

Maturitätsprüfungen 2007
(Be, Es, Gä, Sw)

M a t h e m a t i k **Grundlagen**

Bemerkungen

Zeit : 180 Minuten.
Fundamentum Mathematik und Physik.
Taschenrechner TI 83 bzw. TI voyage200.
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit Scharparameter $a \in \mathbb{R}^+$ und die Funktion g mit Gleichungen $y = f_a(x) = a\,x^2 + 1$ und $y = g(x) = -x^2 + 8x - 7$

   a) Sei a=2. Der Punkt P liegt auf dem Graph G_f, der Punkt Q auf Graph G_g derart, dass die Strecke PQ parallel zur y-Achse ist. Wie lauten die Koordinaten des Punktes P, so dass die Länge von PQ minimal wird.

   b) Sei a=2. Die Fläche, die von den beiden Graphen, den Koordinatenachsen und der Geraden g: x=2 eingeschlossen ist, rotiert um die x-Achse und erzeugt so einen Rotationskörper. Bestimmen Sie sein Volumen.

   c) Wie gross ist der Scharparameter a, falls sich die beiden dazugehörigen Graphen berühren?

   d) Berechnen Sie – für den bei c) bestimmten Parameter a – den Inhalt derjenigen Fläche, die von den beiden Graphen und den Koordinatenachsen eingeschlossen ist.

2. Bei einem Spiel werden zwei ideale Würfel einmal geworfen.
   Würfelt man zwei gleiche Augenzahlen, so erhält man die Augensumme als Punktezahl.
   Würfelt man zwei unterschiedliche Augenzahlen, so erhält man die grössere der beiden Augenzahlen als Punktezahl.

   a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit genau 4 Punkte zu erzielen $\frac{7}{36}$ beträgt.

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Punkte zu erhalten.

   c) Die Zufallsvariable X sei die erzielte Punktezahl. Geben Sie die Verteilung von X an und berechnen Sie den Erwartungswert E(X).

   d) Bei einem Wurf wurde die Punktezahl 6 erzielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren die beiden Augenzahlen unterschiedlich?

   e) Die beiden Würfel werden zehnmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in diesen zehn Spielen genau dreimal die Punktezahl 4 erzielt?

3. Eine Funktionenschar mit reellem Scharparameter a ($a \neq 0$) ist durch die Funktionsvorschrift $y = f_a(x) = 4 - a \cdot \ln(x+1)$ gegeben.

   a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionenschar abhängig vom Parameter a und bestimmen Sie die Asymptote.
   b) Wie gross ist der Wert des Parameters a, so dass die Steigung der Tangente des Graphen von f_a im y-Achsenschnittpunkt -2 beträgt?

   Für die weiteren Teilaufgaben rechnen Sie mit dem in Teilaufgabe b) bestimmten Wert des Parameters a weiter. Die dazugehörige Funktion wird f genannt.
   Falls Sie die Teilaufgabe b) nicht gelöst haben, nehmen Sie den Wert $a = 3$ an.

   c) Ein Stück des Graphen von f verläuft im 1. Quadranten. Für welchen Punkt P(x|y) auf diesem Stück des Graphen ist die Summe seiner Koordinaten am grössten?
   d) Die Tangente t und die Normale n am Graph von f im y-Achsenschnittpunkt bilden mit der x-Achse ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

4. Gegeben sind die Punkte A(1|5|-2), B(5|8|-2), S(11|0|-2) und die Gerade

   $$h: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABS rechtwinklig ist und berechnen Sie die Längen der drei Seiten.
   b) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E = (ABS) an.
   c) Zeigen Sie, dass die Gerade h parallel zur Geraden g = (AB) ist, aber nicht mit ihr zusammenfällt; berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h.
   d) Bestimmen Sie die Punkte C und D auf h so, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
   e) Die Punkte A, B, C, D und S bilden eine Pyramide. Zeigen Sie, dass die Gerade (BS) senkrecht auf der Ebene des Rechtecks ABCD steht und berechnen Sie anschliessend das Volumen dieser Pyramide.

5. Zwei unabhängige Kurzaufgaben

   a) Gegeben sind der Kreis k: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0$ und die Gerade g: $x + 2y + 22 = 0$.
   Berechnen Sie zuerst Mittelpunkt und Radius des gegebenen Kreises k, skizzieren Sie die Situation sorgfältig und finden Sie dann die Gleichung des kleinsten Kreises, welcher den Kreis k und die Gerade g berührt.

   b) Gegeben ist die reelle Funktion $f: \ x \rightarrow \ f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$.

      b1) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten.
      b2) Die Kurve begrenzt im 1.Quadranten mit der x-Achse und einer schiefen Asymptote eine ins Unendliche reichende Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.