

Lösung der Aufgabe 1 :

a) $x' = 5x + 2y + 1$
 $y' = 3x + 4y + 2$

Fixpunktbedingung: $x' = x, y' = y$

$$\begin{array}{l} x = 5x + 2y + 1 \\ y = 3x + 4y + 2 \\ \hline 0 = 4x + 2y + 1 \cdot 3 \\ 0 = 3x + 3y + 2 \cdot 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array} \right\} -$$

$$0 = 6x - 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$0 = -6y - 5$$

$$y = -\frac{5}{6} \quad \text{Fixpunkt } \left(\frac{1}{6} \mid -\frac{5}{6} \right)$$

Fixgeraden: in den beiden Gleichungen für die Fixpunktbedingungen müsste die gleiche Gerade dargestellt werden; dies ist nicht der Fall.

b)

$$\begin{array}{l} x' = 5x + 2y + 1 \cdot 4 \\ y' = 3x + 4y + 2 \cdot 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 2 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 5 \end{array} \right\} -$$

$$4x' - 2y' = 14x$$

$$3x' - 5y' = -14y - 7$$

$$\alpha^{-1}: \quad x = \frac{2}{7}x' - \frac{1}{7}y'$$

$$y = -\frac{3}{14}x' + \frac{5}{14}y' - \frac{1}{2}$$

c) $y = m \cdot x + q$ x und y aus der Umkehrabbildung einsetzen:

$$-\frac{3}{14}x' + \frac{5}{14}y' - \frac{1}{2} = m \cdot \left(\frac{2}{7}x' - \frac{1}{7}y' \right) + q$$

$$\left(\frac{5}{14} + \frac{m}{7} \right) \cdot y' = \left(\frac{3}{14} + \frac{2m}{7} \right) \cdot x' + \left(q + \frac{1}{2} \right) \quad \left| \cdot \frac{14}{5+2m} \right.$$

$$y' = \frac{3+4m}{5+2m}x' + \left(q + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{14}{5+2m}$$

d) Koeffizientenvergleich: $\frac{3+4m}{5+2m} = m \Rightarrow 3+4m = 5m+2m^2 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0$

und: $14 \cdot \frac{q+\frac{1}{2}}{5+2m} = q \Rightarrow 14q+7 = 5q+2mq \Leftrightarrow (9-2m) \cdot q = -7 \Leftrightarrow q = -\frac{7}{9-2m}$

Lösungen

$m = 1$ und daraus $q = -1$
 $m = -\frac{3}{2}$ und daraus $q = \frac{7}{6}$

Man erhält zwei Fixgeraden $y = x - 1$ und $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{12}$

e) Einsetzen von x und y aus der Umkehrabbildung in $105 \cdot x^2 - 56 \cdot \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = 120$:

$$105 \cdot \left(\frac{2}{7}x' - \frac{1}{7}y' \right)^2 - 56 \cdot \left(-\frac{3}{14}x' + \frac{5}{14}y' - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 = 120$$

Mit Hilfe des TI voyage 200 erhält man die Lösung $6 \cdot x'^2 - 5 \cdot y'^2 = 120$

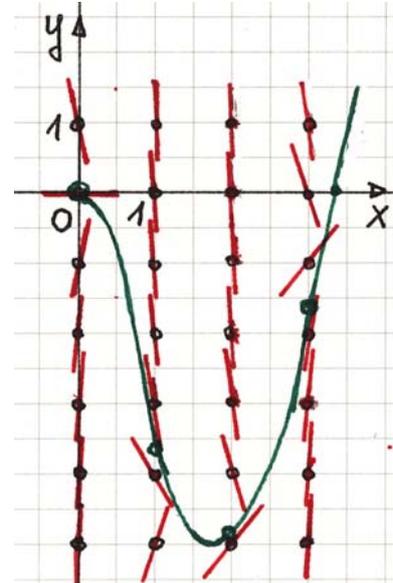
oder $\frac{x'^2}{20} - \frac{y'^2}{24} = 1$.Hyperbel mit $a = 2\sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{6}$, symmetrisch zu beiden

Achsen, mit den Asymptoten $y = \pm \sqrt{\frac{6}{5}}x$, Brennpunkte $F_1(4\sqrt{61} \mid 0)$ und $F_2(-4\sqrt{61} \mid 0)$.

Lösung der Aufgabe 2:

a) Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -5y - 26 \cdot \sin(x)$

x	y	0	1	2	3
1	-5	-26,9	-28,6	-8,7	
0	0	-21,9	-23,6	-3,7	
-1	5	,16,9	-18,6	1,3	
-2	10	-11,9	-13,6	6,3	
-3	15	-6,9	-8,6	11,3	
-4	20	-1,9	-3,6	16,3	
-5	25	3,1	1,4	21,3	



b) $y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -5 \cdot y$

Separation der Variablen: $\frac{dy}{y} = -5 dx$ Integration $\int \frac{dy}{y} = -\int 5 dx$

$\ln |y| = -5x + C$

$y = e^{-5x+C} = K \cdot e^{-5x}$

c) Variation der Konstanten: $y = K(x) \cdot e^{-5x}$

$y' = K'(x) \cdot e^{-5x} + K(x) \cdot (-5) \cdot e^{-5x}$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung

$K'(x) \cdot e^{-5x} + \cancel{K(x) \cdot (-5) \cdot e^{-5x}} + 5 \cdot \cancel{K(x) \cdot e^{-5x}} = -26 \sin(x)$

$K'(x) = -26 e^{5x} \cdot \sin(x)$

$K(x) = -26 \cdot \int e^{5x} \cdot \sin(x) dx$

Partielle Integration: $\int e^{5x} \cdot \sin(x) dx = e^{5x} \cdot (-\cos(x)) - (-5 \int e^{5x} \cos(x) dx) =$

$f(x) = e^{5x}, f'(x) = 5e^{5x}$

$g'(x) = \sin(x), g(x) = -\cos(x)$

$= -e^{5x} \cdot \cos(x) + 5(e^{5x} \cdot \sin(x) - 5 \int e^{5x} \sin(x) dx)$

$\int e^{5x} \sin(x) dx = -e^{5x} \cos(x) + 5e^{5x} \sin(x) - 25 \int e^{5x} \sin(x) dx$

$$-26 \cdot \int e^{5x} \sin(x) dx = e^{5x} \cdot (\cos(x) - 5 \sin(x)) + C$$

Also $K(x) = e^{5x} (\cos(x) - 5 \sin(x)) + C$

und schliesslich $y = K(x) \cdot e^{-5x} = \cos(x) - 5 \sin(x) + C \cdot e^{-5x}$

d) Für $y(0) = 0$ ergibt sich $0 = \cos(0) - 5 \sin(0) + C \cdot e^0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erhält man die Lösung $y = \cos(x) - 5 \sin(x) - e^{-5x}$

Lösung der Aufgabe 3 :

a) $f(z) = w = \frac{2(1-i \cdot z)}{z-i}$ und $\overline{f(z)} = \overline{w} = \frac{2(1+i \cdot \overline{z})}{\overline{z}+i}$

Fixpunktbedingung: $z = \frac{2-2 \cdot i \cdot z}{z-i} \quad | \cdot (z-i)$
 $z^2 - i \cdot z = 2 - 2iz \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + i \cdot z - 2 = 0$

Fixpunkte $z_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i$ [Polarform $\sqrt{7} (\cos 159.3.. + i \sin 159.3...)$]
 $z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i$ [Polarform $\sqrt{7} (\cos 200.7.. + i \sin 200.7...)$]

b) $w(z-i) = 2 - 2iz \quad \Leftrightarrow (w + 2i) \cdot z = 2 + i \Rightarrow z = \frac{2+w \cdot i}{w+2 \cdot i}$ mit $\overline{z} = \frac{2-\overline{w} \cdot i}{\overline{w}-2 \cdot i}$

w und z vertauschen: $w = f^{-1}(z) = \frac{2+z \cdot i}{z+2 \cdot i}$ Umkehrabbildung mit $\overline{w} = \frac{2-\overline{z} \cdot i}{\overline{z}-2 \cdot i}$

$D = \mathbb{C} \setminus \{ i \}, W = \mathbb{C} \setminus \{ -2i \}$

c) Reelle Achse der w-Ebene: $w = \lambda; \overline{w} = \lambda$, also hat die reelle Achse die Gleichung $w - \overline{w} = 0$ oder $w = \overline{w}$.

Setzt man die Umkehrfunktion in diese Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{2(1-iz)}{z-i} = \frac{2(1+i\overline{z})}{\overline{z}+i} \Rightarrow (1-iz) \cdot (\overline{z}+i) = (1+i\overline{z}) \cdot (z-i) \Leftrightarrow \overline{z}+i - iz\overline{z} - i^2z = z-i + iz\overline{z} - i^2\overline{z}$$

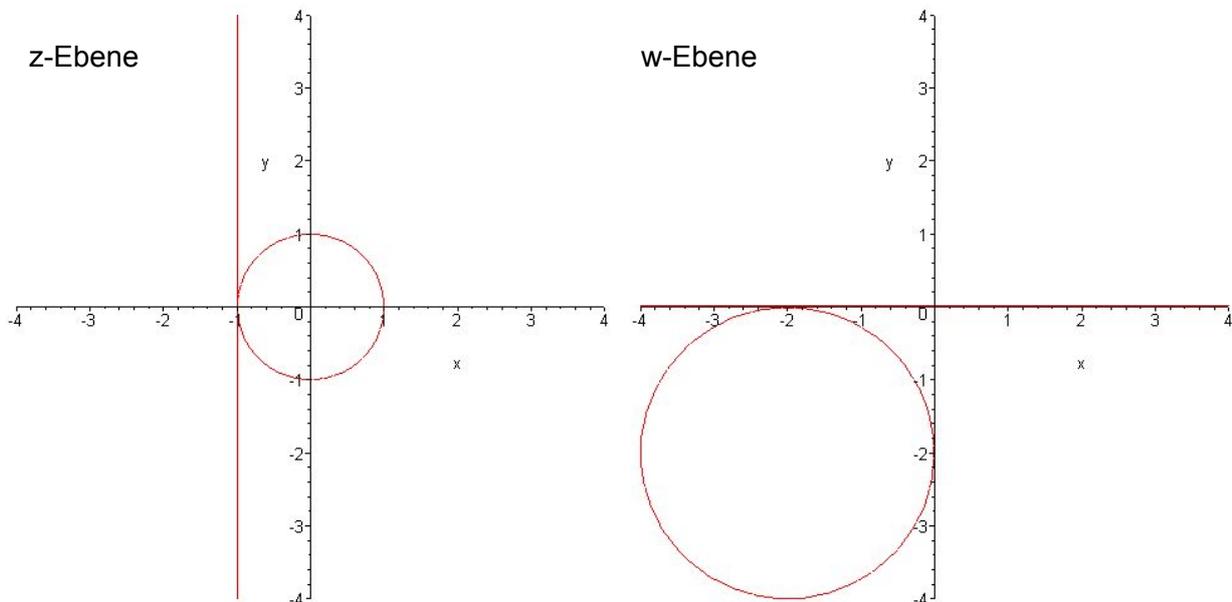
$$\Leftrightarrow 0 = 2iz\overline{z} - 2i \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot \overline{z} = 1 \quad \text{Einheitskreis in der z-Ebene}$$

Die Punkte des Einheitskreises in der z-Ebene werden durch die gegebene Abbildung auf die reelle Achse der w-Ebene abgebildet.

d) Gerade $g: z = \lambda i - 1$ und $\bar{z} = -\lambda i - 1$, also $z + \bar{z} = -2$
 z und \bar{z} eingesetzt: $\frac{2 + w i}{w + 2i} + \frac{2 - \bar{w} i}{\bar{w} - 2i} = -2 \quad | \cdot (w + 2i) \cdot (\bar{w} - 2i)$
 $(2 + w i)(\bar{w} - 2i) + (2 - \bar{w} i)(w + 2i) = -2(w + 2i)(\bar{w} - 2i)$
 $2\bar{w} - 4i + w\bar{w}i + 2w + 2w + 4i - w\bar{w}i + 2\bar{w} = -2w\bar{w} + 4iw - 4i\bar{w} - 8$
 $4w + 4\bar{w} = -2w\bar{w} + 4iw - 4i\bar{w} - 8 \quad | \cdot \frac{1}{2}$
 $w\bar{w} + (2 - 2i) \cdot w + (2 + 2i) \cdot \bar{w} + 4 = 0$

Mit $w = u + iv$ folgt
 $u^2 + v^2 + (2-2i)(u+iv) + (2+2i)(u-iv) + 4 = 0$
 $u^2 + v^2 + 2u + 2iv - 2iu + 2v + 2u - 2iv + 2iu + 2v + 4 = 0$
 $u^2 + v^2 + 4u + 4v + 4 = 0$
 $(u+2)^2 + (v+2)^2 = 4$

Kreis mit Mittelpunkt $M(-2|-2)$ und Radius 2.



Alternative zur Lösung der Aufgabe 3d) mit der Parametergleichung der Geraden:

Gerade: $z = -1 + \lambda i$

z einsetzen in die Abbildungsgleichung

$$w = \frac{2 \cdot (1-i) \cdot (-1 + \lambda i)}{(-1 + \lambda i) - i} = \frac{2 \cdot ((\lambda+1) + i) \cdot (-1 - i \cdot (\lambda-1))}{(-1+i \cdot (\lambda-1)) \cdot (-1-i \cdot (\lambda-1))} = 2 \cdot \frac{(-1-\lambda-i \cdot \lambda^2 + i - i + \lambda - 1)}{1 + (\lambda-1)^2} = 2 \cdot \frac{-2 - i \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 2}$$

Mit $w = u + i \cdot v$ folgt: $u = \frac{-4}{\lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 2}$ und $v = \frac{-2 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 2}$

Löst man beide Gleichungen nach λ auf, so ergibt sich:

$$\lambda_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{-u^2 - 4u}}{u} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{1,2} = \frac{v \pm \sqrt{-v^2 - 4v}}{v+2}$$

Gleichsetzen der beiden Ergebnisse und Auflösen nach v liefert

$$v = -2 \pm \sqrt{-u^2 - 4u} \quad | +2, \text{ Quadrieren}$$

$$(v+2)^2 = -u^2 - 4u \quad | +u^2 + 4u + 4$$

$$\underline{(u+2)^2 + (v+2)^2 = 4}$$

Lösung der Aufgabe 4:

a) Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = v_1 \cdot \frac{\pi \cdot (D_1/2)^2}{\pi \cdot (D_2/2)^2} = v_1 \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2} = 25v_1 = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bernoulli-Gleichung für $h = \text{konst.}$:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2) = 10\text{kPa} - 827\text{Pa} = 9.17\text{kPa}$$

b) Der Druck sinkt um knapp 10%. Dies kann zu einer Ablösung der Ablagerung führen (Thrombosegefahr).

c) Aktivität zu Beginn:

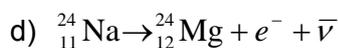
$$A_0 = 2.40 \cdot 10^{-10} \text{ g} \cdot 3.20 \cdot 10^{17} \frac{\text{Bq}}{\text{g}} = 7.68 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

Aktivität nach 2.5 Stunden:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \text{ mit } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$A(2.5\text{h}) = A_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot (2.5\text{h}/15\text{h})} = 6.84 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

$$\text{Damit ergibt sich ein Blutvolumen } V = \frac{6.84 \cdot 10^7 \text{ Bq}}{1.27 \cdot 10^5 \text{ Bq}} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ Liter} = 5.39 \text{ Liter}$$



Lösung der Aufgabe 5:

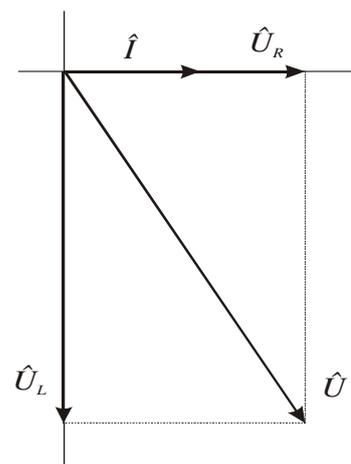
a) Impedanz Z der Wechselstromschaltung:

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \text{ mit } \omega = 2\pi \cdot f$$

mit $R = 30\Omega$ und $Z_C = 53\Omega$ ergibt sich $Z = 60.9\Omega$

b) $\tan \Delta\varphi = \frac{Z_C}{R} \Rightarrow \Delta\varphi = 60.5^\circ$

Die Spannung hinkt dem Strom um 60.5° nach.



c) Für einen Hochpass greift man die Spannung am ohmschen Widerstand ab. Für die Ausgangsspannung U_a gilt dann in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_e :

$$U_a = U_R = R \cdot I = R \cdot \frac{U_e}{Z} = R \cdot \frac{U_e}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{U_e}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}}$$

Für sehr grosse Frequenzen wird $U_a \approx U_e$, für sehr kleine Frequenzen wird $U_a \approx 0$

(Hochpass).

d) $U_e(t) = U_C + U_R$

$$\hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{Q}{C} + R \cdot I = \frac{Q}{C} + R \cdot \dot{Q}$$

$$\dot{Q} + \frac{Q}{R \cdot C} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

e) homogene Gleichung: $\dot{Q} + \frac{Q}{R \cdot C} = 0$

allgemeine Lösung (Beweis durch Einsetzen oder Herleitung wie in 2b):

$$Q(t) = Q^* \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (\text{Integrationskonstante: } Q^*)$$

f) Ansatz: $Q_{inh}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$ (entspricht Lösung in 2c)

Lösung der Aufgabe 6:

a) Drehmomentengleichgewicht: $M_{links} = M_{rechts}$

$$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin(90^\circ - \gamma) = F_{Seil} \cdot l \cdot \sin(\alpha) \quad \text{mit dem Winkel } \alpha \text{ zwischen Brücke und Seil}$$

Für α gilt: $2\alpha + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

$$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \gamma = F_{Seil} \cdot l \cdot \sin(45^\circ + \frac{\gamma}{2})$$

$$\Rightarrow F_{Seil} = \frac{m \cdot g}{2} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin(45^\circ + \frac{\gamma}{2})} = 9.06 \text{ kN}$$

b) Drehmoment der Walze:

$$M_{Walze} = F_{Seil} \cdot r = 2.72 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

c) Ausser dem Drehmomentengleichgewicht muss auch ein Kräftegleichgewicht herrschen,

und damit $\vec{F}_D = -(\vec{F}_G + \vec{F}_S)$.

d) Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{M}{J}$

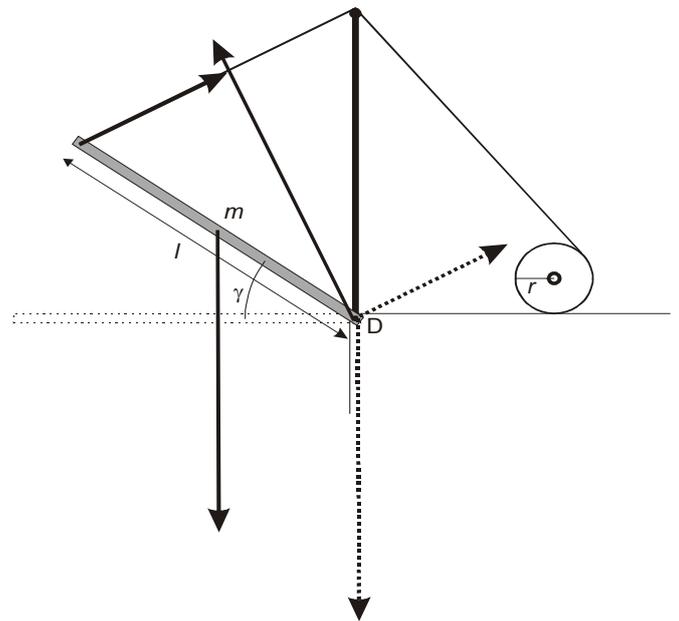
Trägheitsmoment bei Achse durch Schwerpunkt:

$$J_{Stab,S} = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

Trägheitsmoment bei Achse durch Drehpunkt D (Satz von Steiner):

$$J_{Stab,D} = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 2.67 \cdot 10^3 \text{ kg m}^2$$

Damit ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit:



$$\alpha = \frac{M_{\text{links}}}{J_{\text{Stab},D}} = \frac{m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \gamma}{J_{\text{Stab},D}} = 6.0 \frac{1}{\text{s}^2}$$