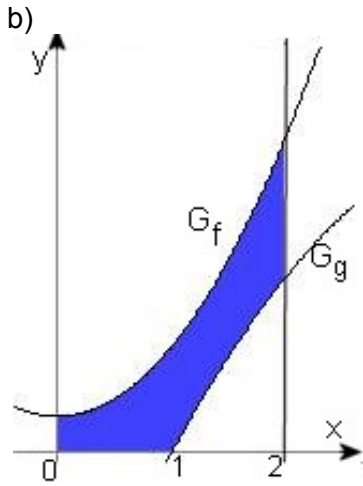


Lösung Aufgabe 1, KSR GF07

a) Zielfunktion $d(x) = 2x^2 + 1 - (-x^2 + 8x - 7)$ soll minimal werden.

$$d'(x) = 6x - 8 := 0, \text{ also } x_1 = \frac{4}{3} \text{ und somit } P\left(\frac{4}{3} \mid \frac{41}{9}\right) \in G_f$$

Da $d''(x) = 6 > 0$ für alle x , so ist $d(x_1)$ minimal.



Berechnung Nullstelle x_0 der Funktion g :
 $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7) = 0$, also $x_0 = 1$.
 (Die zweite Nullstelle 7 kommt nicht mehr in Frage)

Ansatz:

$$\text{Volumen } V = \pi \left(\int_0^2 (2x^2 + 1)^2 dx - \int_1^2 (-x^2 + 8x - 7)^2 dx \right) V = \pi$$

$$\left(\int_0^2 (4x^4 + 4x^2 + 1) dx - \right.$$

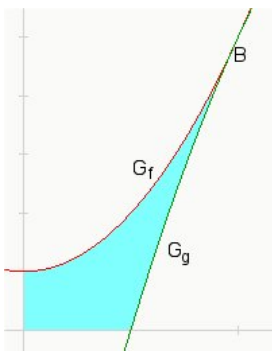
$$\left. \int_1^2 (x^4 + 64x^2 + 49 - 16x^3 + 14x^2 - 112x) dx \right)$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^2 - \left[\frac{1}{5}x^5 - 4x^4 + \frac{78}{3}x^3 - 56x^2 + 49x \right]_1^2 \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{574}{15} - \frac{138}{15} \right) = \frac{436}{15} \pi$$

c) Für den Berührungspunkt $B(u/v)$ gilt: $u^2 + 1 = -u^2 + 8u - 7$ (1) und $2au = -2u + 8$ (2)
 Aus (2) folgt $au = -u + 4$, eingesetzt in (1) ergibt $(-u + 4)u + 1 = -u^2 + 8u - 7$, also
 $4u + 1 = 8u - 7$. Damit ist $u = 2$ und $a = 1$

d) $y = f_1(x) = x^2 + 1$, Berührungspunkt $B(2/\dots)$ gemäss c),
 Berechnung Nullstelle x_0 von G_g siehe bei b)



$$\text{Ansatz: Inhalt } A = \int_0^2 (x^2 + 1) dx - \int_1^2 (-x^2 + 8x - 7) dx = \dots$$

$$A = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} + 16 - 14 - \left(-\frac{1}{3} + 4 - 7 \right) \right) \\ = 5 - 3 = 2$$

Lösung Aufgabe 2, KSR GF07

a) $P((2,2), (4,1), (4,2), (4,3), (3,4), (2,4), (1,4)) = \frac{7 \text{ günstige}}{36 \text{ mögliche}} = \frac{7}{36}$ [oder mit einem Baumdiagramm.]

b) $P(2 \text{ Punkte}) = P((1,1), (1,2), (2,1))$
 $P(3 \text{ Punkte}) = P((1,2), (1,3), (2,1), (3,1))$

$$P(\text{mind. 4 Punkte}) = 1 - P(2 \text{ Punkte}) - P(3 \text{ Punkte}) = 1 - \frac{3}{36} - \frac{4}{36} = \frac{29}{36}$$

c) Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Variable ($X = \text{Punktezahl}$)

Punktezahl x_i	2	3	4	5	6	8	10	12
$P(x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{36} =$$

$$\frac{91}{18} \approx \mathbf{5.06}$$

d) $P(\text{unterschiedlich} \mid x=6) = \frac{P(\text{untersch. und } x=6)}{P(x=6)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{10}{11}$

e) Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = \frac{7}{36}$. $X = \text{Anzahl (Punktezahl 4)}$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{7}{36}\right)^3 \left(\frac{29}{36}\right)^7 \approx \mathbf{0.194}$$

Lösung Aufgabe 3, KSR GF07

a) Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - a \cdot \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \frac{4}{a} \Leftrightarrow x+1 = e^{\frac{4}{a}} \Leftrightarrow \underline{x = e^{\frac{4}{a}} - 1}$

Asymptoten: $\lim_{x \rightarrow -1^+} (4 - a \cdot \ln(x+1)) = 4 - a \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} (\ln(x+1)) = \infty$ oder $-\infty \Rightarrow$ Gerade $\underline{x = -1}$
ist (einseitige) senkrechte Asymptote für alle Funktionen f_a .

b) $f_a'(x) = -a \frac{1}{x+1} = -\frac{a}{x+1}$ y-Achsen Schnittpunkt $\Rightarrow x = 0$

$f_a'(0) = -\frac{a}{0+1} = -a = -2 \Rightarrow \underline{a = 2}$

c) $f(x) = 4 - 2\ln(x+1)$ Nullstelle: $x = e^{\frac{4}{2}} - 1 = e^2 - 1$

Zielfunktion: $S(x, y) = x + y$

Nebenbedingung: P liegt auf dem Graphen von f,
also $y = f(x) = 4 - 2\ln(x+1)$

$\Rightarrow S(x) = x + 4 - 2\ln(x+1)$ mit Definitionsbereich $ID = [0; e^2 - 1]$

Lokale Extrema: $S'(x) = 1 - 2 \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{2}{x+1} = 1 \Rightarrow x+1 = 2 \Rightarrow x = 1$

$S''(x) = -2 \cdot (-1) \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in ID \Rightarrow x = 1$ ist lokale **Minimalstelle**, also muss sich die Maximalstelle am Rand befinden.

Ränder:

$x = 0: \quad S(0) = 0 + 4 - 2\ln(0+1) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$

$x = e^2 - 1: \quad S(e^2 - 1) = e^2 - 1 + 4 - 2\ln(e^2 - 1 + 1) = e^2 - 1 + 0 = e^2 - 1 \approx 6.39$

$S(e^2 - 1) > S(0) \Rightarrow$ Der Punkt $\underline{P(e^2 - 1 | 0)}$ hat die grösste Koordinatensumme.

d) Tangente t: nach Teilaufgabe a) gilt $m_t = -2 \Rightarrow t: y = -2x + b$

y-Achsen Schnittpunkt $S_y(0|4) \Rightarrow 4 = b \Rightarrow t: y = -2x + 4$

Nullstelle von t: $x_1 = 2$

Normale n: $m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2} \Rightarrow n: y = \frac{1}{2}x + 4$

Nullstelle von n: $x_2 = -8$

Länge der Grundseite des Dreiecks: $g = x_1 - x_2 = 2 - (-8) = 10$ Höhe: $h = y_{S_y} = 4$

Flächeninhalt des Dreiecks: $\underline{A} = \frac{1}{2}g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = \underline{20}$

Lösungen Aufgabe 3 mit a=3 (Variante):

c) $f(x) = 4 - 3\ln(x+1)$ Nullstelle: $x = e^{\frac{4}{3}} - 1 \approx 2.79$
Zielfunktion: $S(x, y) = x + y$ Nebenbedingung: $y = f(x) = 4 - 3\ln(x+1)$
 $\Rightarrow S(x) = x + 4 - 3\ln(x+1)$ mit Definitionsbereich $ID = [0; e^{\frac{4}{3}} - 1]$

Lokale Extrema: $S'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{3}{x+1} = 1 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$

$S''(x) = -3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in ID \Rightarrow x = 2$ ist lokale **Minimal**stelle, also muss sich die Maximalstelle am Rand befinden.

Ränder:

$x = 0:$ $S(0) = 0 + 4 - 3\ln(0+1) = 4 - 3 \cdot 0 = 4$

$x = e^{\frac{4}{3}} - 1:$ $S(e^{\frac{4}{3}} - 1) = e^{\frac{4}{3}} - 1 + 4 - 3\ln(e^{\frac{4}{3}} - 1 + 1) = e^{\frac{4}{3}} - 1 + 0 = e^{\frac{4}{3}} - 1 \approx 2.79$

$S(0) > S(e^{\frac{4}{3}} - 1) \Rightarrow$ Der Punkt $P(0|4)$ hat die grösste Koordinatensumme.

d) $f'(x) = -3 \frac{1}{x+1} = -\frac{3}{x+1}$ y-Achsen Schnittpunkt $\Rightarrow x = 0$

Tangente t: $m_t = f'(0) = -\frac{3}{0+1} = -3 \Rightarrow t: y = -3x + b$

y-Achsen Schnittpunkt $S_y(0|4) \Rightarrow 4 = b \Rightarrow t: y = -3x + 4$

Nullstelle von t: $x_1 = \frac{4}{3}$

Normale n: $m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{3} \Rightarrow n: y = \frac{1}{3}x + 4$

Nullstelle von n: $x_2 = -12$

Länge der Grundseite des Dreiecks: $g = x_1 - x_2 = \frac{4}{3} - (-12) = \frac{40}{3}$

Höhe: $h = y_{S_y} = 4$

Flächeninhalt des Dreiecks: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 4 = \underline{\underline{\frac{80}{3}}}$

Lösung Aufgabe 4, KSR GF07

$$a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 8-5 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BS} = \begin{pmatrix} 11-5 \\ 0-8 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AS} = \begin{pmatrix} 11-1 \\ 0-5 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 40 - 15 \neq 0, \quad \vec{AS} \cdot \vec{BS} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -60 + 40 \neq 0,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -24 + 24 = 0 \quad \text{rechter Winkel bei B}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5, \quad |\vec{AS}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 0^2} = 5 \cdot \sqrt{5}, \quad |\vec{BS}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 0^2} = 10$$

Die Katheten **AB** und **BS** haben die Länge **5** bzw. **10**, die Hypotenuse **AS** hat die Länge

$$5 \cdot \sqrt{5} = 11,18\dots$$

- b) Kurze Lösung: Die drei Punkte A, B und S haben alle die z-Koordinate -2, also lautet die Gleichung der Ebene $z = -2$ bzw. $z + 2 = 0$

Lösung mit Vektorprodukt: $\vec{AB} \times \vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der

Ebene. Die Gleichung lautet $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$, durch Einsetzen eines Punktes erhält man $D = 2$

Lösung über die Parameterform mit A als 'Anfangspunkt' und den Richtungsvektoren \vec{AB} und \vec{AS}

$$x = 1 + 4u + 10v$$

$$y = 5 + 3u - 5v$$

$z = -2 + 0u + 0v$ ergibt die Bedingungen $z = -2$ und (z.B.) $x + 2y = 11 + 10u$, d.h. x und y beliebig.

- c) g und (AB) haben die gleiche Richtung, gegeben durch den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Punkt A(1|5|-2) liegt nicht auf h: $5 + 4t = 1$ für $t = -1$

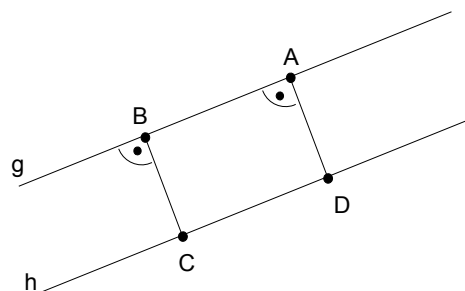
$$8 + 3t = 5 \quad \text{für } t = -1$$

$$3 + 0t = -2 \quad \text{nie}$$

- d)

Für den gesuchten Punkt C mit

$$\vec{r}_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t_C \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4t_C \\ 8+3t_C \\ 3 \end{pmatrix} \text{ gilt die Bedingung}$$

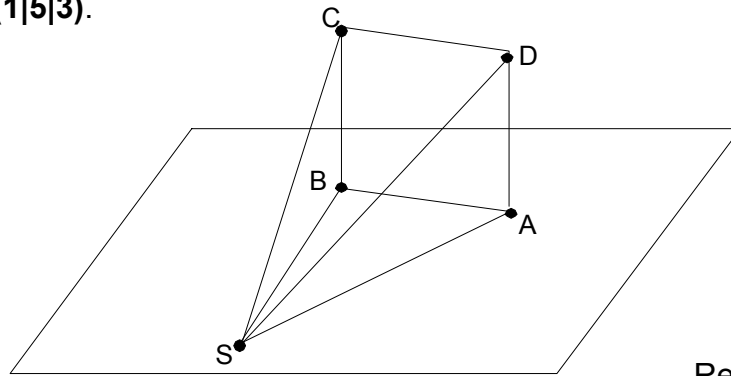


$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5+4t_C-5 \\ 8+3t_C-8 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4t_C \\ 3t_C \\ 5 \end{pmatrix} = 25t_C = 0$$

also $t_C = 0$; somit ist **C(5|8|3)** der 'Anfangspunkt' der Geraden h.

Ausserdem ist $\vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{CD} = \vec{r}_C + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der vierte Eckpunkt des

Rechtecks ist **D(1|5|3)**.



e) Das

Rechteck hat

die Länge $\overline{AB} = 5$ und die Breite $\overline{BC} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 5$. Da $BS \perp AB$ steht (siehe Teil a)),

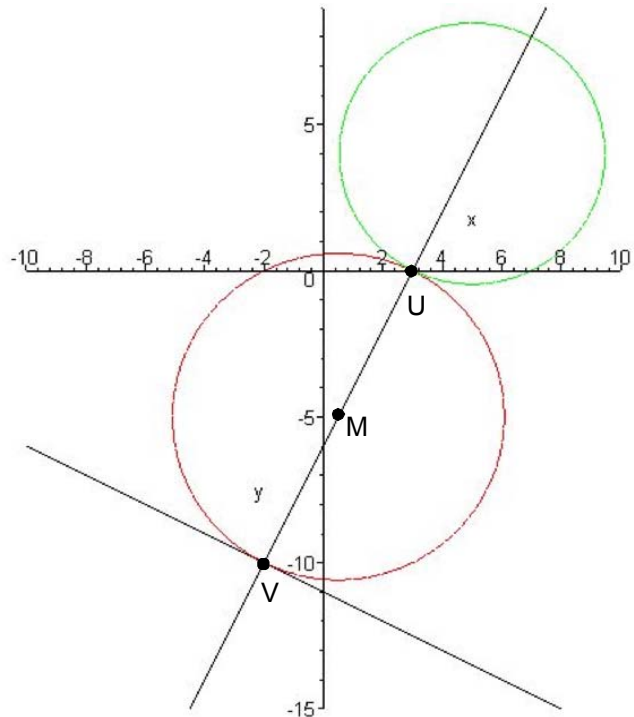
aber auch $BS \perp BC$ ist ($\vec{BS} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$), ist BS die Höhe der Pyramide.

Also ist $V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{25 \cdot 10}{3} = \frac{250}{3}$.

Lösung Aufgabe 5a, KSR GF07

$$k: x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 + 21 = 25 + 16 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

Kreis mit Mittelpunkt $(5|4)$ und Radius $2\sqrt{5}$.



11

Gleichung von g : $y = -\frac{1}{2} \cdot x -$

Eine Normale zu g hat den

Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die

Gleichung der Normalen durch den Mittelpunkt ist $n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 5 + t \\ y = 4 + 2t \end{matrix}$.

Man erhält die Gleichung von n :

$$2x - y - 6 = 0 \text{ oder } y = 2 \cdot x - 6.$$

$$n \cap g : 2x - 6 = -\frac{1}{2}x - 11 \quad \frac{5}{2}x = -5 \quad \Rightarrow x = -2, y = -10 \quad V(-2|-10)$$

$$\begin{aligned} n \cap k : (x-5)^2 + ((2x-6)-4)^2 &= 20 \quad \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 40x + 100 = 0 \\ 5x^2 - 50x + 125 &= 0 \\ x - 10x + 25 &= 0 \\ (x-3) \cdot (x-7) &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält $U(3|0)$ und $V(-2|-10)$ und daraus den Mittelpunkt des gesuchten Kreises: $M(\frac{1}{2} | -5)$.

Der Radius des gesuchten Kreises ist

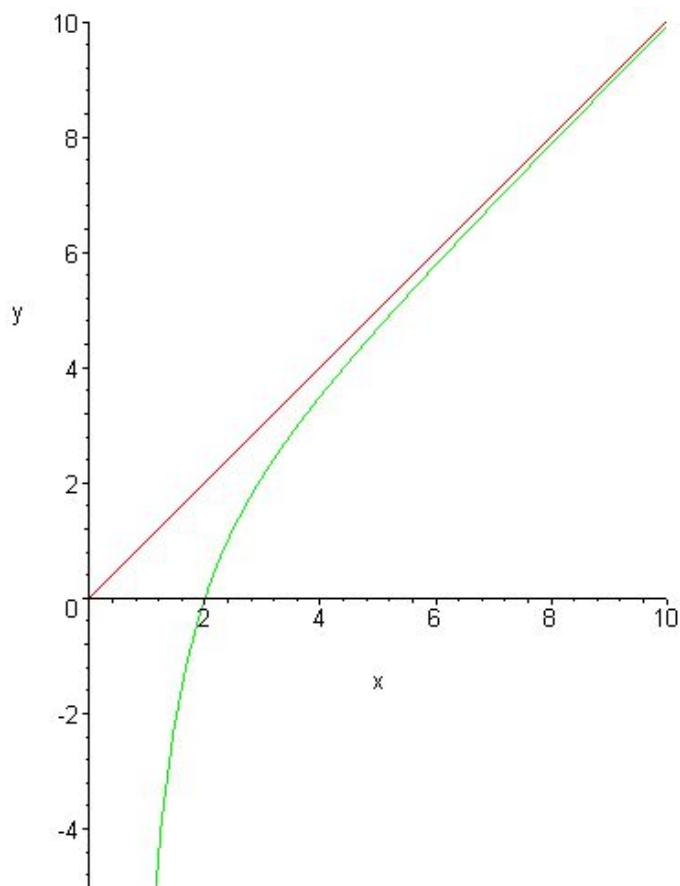
$$\overline{MU} = \left| \vec{MU} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} = 5,590\dots$$

Die Gleichung des Kreises lautet demnach:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 5)^2 = \frac{125}{4}$$

Lösung Aufgabe 5b, KSR GF07

b1)



Es ist $\frac{x^3 - 8}{x^2} = x - \frac{8}{x^2}$, also ist $y = x$ die Gleichung einer schiefen Asymptoten.

Vertikale Asymptote: $x = 0$ (y-Achse)

$$\text{b2) } \int_0^b x \, dx - \int_2^b \left(x - \frac{8}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b - \left[\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right]_2^b = \frac{b^2}{2} - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{8}{b} - 2 - 4\right) = -\frac{8}{b} + 6$$

Für $b \rightarrow \infty$ erhält man für den Wert des uneigentlichen Integrals **6**.