KANTONSSCHULE REUSSBÜHL MATURITÄTSPRÜFUNG 2008
(Be, Do)

Schwerpunktfach
Physik und Anwendungen der Mathematik

Bemerkungen:

Zeit: 3 Stunden
Punktzahl: Maximum = 60 Punkte, 48 Punkte = Note 6.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum, Taschenrechner TI Voyage.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1: Differentialgleichung (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' \cos x + y \sin x = \tan x$ (*)

a) Wie lautet die Gleichung der Isoklinenschar? Bestimmen Sie speziell die Gleichung der Isokline für die Steigung 0 der gesuchten Kurven und zeichnen Sie diese Isokline für den Definitionsbereich D:= $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ in ein Koordinatensystem.

b) Lösen Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung (TI Voyage nur zur Kontrolle).

c) Finden Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen Differentialgleichung (*) und geben Sie anschliessend die Lösungsgesamtheit von (*) an. Das bei der Berechnung auftretende Integral kann mit dem TI Voyage gelöst werden.
{Wer Teilaufgabe c) nicht lösen kann, benützt zur Lösung von d) das Resultat des TI Voyage für die Lösungsgesamtheit von (*)}

d) Bestimmen Sie die Gleichung $y = f(x)$ derjenigen Lösungskurve G_f, die durch den Punkt P(0/1) geht. Zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der Symmetrie und der Asymptoten in das Koordinatensystem bei a) ein (auch für D= $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen und Funktionen (10 Punkte)

Gegeben ist die komplexe Funktion $z \to w = f(z) = \frac{2z - i}{z + i}$

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge D und Wertemenge W von f.
b) Welches ist das Bild k' des Kreises k: $|z| = 1$?
c) Zeigen Sie: die Gleichung des Bildes g' der Parallelen g zur reellen Achse durch den Punkt P(-i) lautet g': $w + \overline{w} - 4 = 0$.
d) Welches ist das Urbild h der imaginären Achse h'?
e) Stellen Sie alle vorgekommenen Urbilder und Bilder in zwei Gauss-Ebenen dar. (Einheit = 2cm).
G sei das zwischen k und h eingeschlossene Gebiet. Wohin wird dieses Gebiet abgebildet?

Aufgabe 3: Zwei unabhängige Teilaufgaben (je 5 Punkte)

a) Gegeben ist die affine Abbildung f mit den Gleichungen

$x' = a_1x + b_1y$
$y' = 2x + 3y$

a1) Sei $a_1=1$ und $b_1=0$. Zeigen Sie, dass f eine perspektive Affinität ist und bestimmen Sie Affinitätsachse und Affinitätsrichtung. Wie heisst die Gleichung des Bildes g' der Geraden g: $x + y - 1 = 0$ bei dieser Abbildung f?

a2) Für welche Werte von a_1 und b_1 ist die Abbildungen eine Scherung (perspektive Affinität mit Affinitätsrichtung parallel zur Affinitätsachse)?

b) Auf welcher Kurve (Gleichung und Art) liegen die Mittelpunkte derjenigen Kreise, die den Kreis k_1: $x^2 + y^2 = 9$ von aussen berühren und durch den Punkt P(9/0) gehen?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein künstlicher Erdsatellit mit einer Masse von 1 t umkreist die Erde in einer Höhe von 200 km.

4.1. Berechnen Sie die Umlaufdauer des Erdsatelliten!

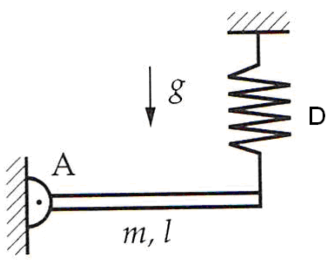
4.2. Durch Einschalten der Triebwerke soll er auf eine stabile Kreisbahn in 300 km Höhe gebracht werden.
Welche Arbeit muss durch das Triebwerk des Satelliten dabei verrichtet werden?
$m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $r_E = 6371$ km

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Ein dünnwandiger Hohlzylinder und ein Vollzylinder aus verschiedenem Material und von verschiedenen Abmessungen rollen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2{,}0$ m/s auf einer horizontalen Ebene. Anschliessend rollen sie einen Hang hinauf.
In welchen Höhen h_1 und h_2 über der Ebene kommen sie zur Ruhe?

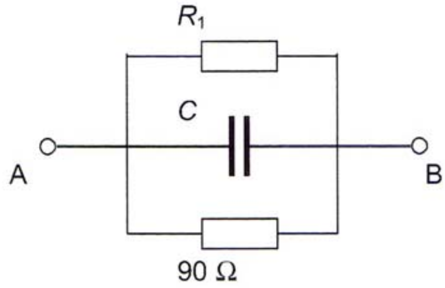
Aufgabe 6 (6 Punkte)

Ein dünner Stab (Masse m, Länge l) ist um die Achse A drehbar gelagert und kann unter dem Einfluss der Feder (Federkonstante D) Drehschwingungen ausführen.



Stellen Sie für kleine Ausschläge die Bewegungsgleichung der Schwingung (Schwingungsdifferentialgleichung) unter Verwendung des Auslenkwinkels φ auf und leiten sie eine Beziehung für die Periodendauer T her.

Aufgabe 7 (6 Punkte)



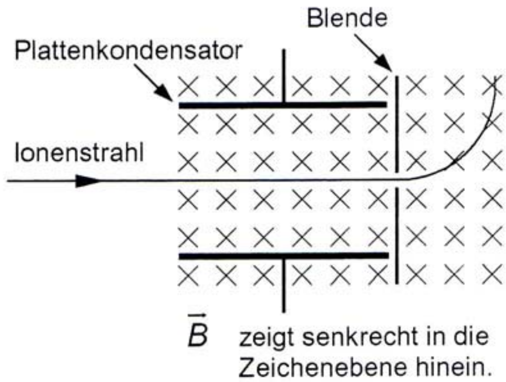
7.1. Liegt zwischen A und B in der abgebildeten Schaltung die Gleichspannung 18,0 V an, so stellt sich die Gesamtstromstärke 500 mA ein.
Begründen Sie, dass die Anfangsstromstärke 500 mA übersteigt.
Berechnen Sie den Widerstand R_1 des ohmschen Bauelements.

7.2. Ersetzt man die Gleichspannung durch die Wechselspannung 18,0 V (Frequenz 50,0 Hz), so beträgt die Gesamtstromstärke 545 mA.
Berechnen Sie die Kapazität C des Kondensators.
Zeichnen Sie ein massstäbliches Zeigerdiagramm und geben Sie den Betrag der im Stromkreis auftretenden Phasenverschiebung zwischen U_{ges} und I_{ges} an.

7.3. Das ohmsche Bauelement R_1 wird nun durch eine Spule ersetzt, um die Phasenverschiebung zwischen der anliegenden Spannung und der Gesamtstromstärke aufzuheben. Berechnen Sie die Induktivität dieser Spule. Der ohmsche Widerstand der Spule darf vernachlässigt werden.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Ein Strahl gleichartiger positiv geladener Ionen unterschiedlicher Geschwindigkeit, dringt senkrecht zu den Feldlinien in ein magnetisches Feld der Flussdichte 0,50 T ein. Das magnetische Feld wird, wie in der Abbildung dargestellt, durch das elektrische Feld eines Plattenkondensators überlagert, so dass nur Ionen der Geschwindigkeit $5{,}0 \cdot 10^5$ $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ die Anordnung auf der in der Abbildung dargestellten Bahn durchlaufen.



8.1. Geben Sie die Richtung des elektrischen Feldes an. Begründen Sie.

8.2. Berechnen Sie den Betrag der notwendigen elektrischen Feldstärke.
Leiten Sie die erforderliche Gleichung her.

8.3. Nach dem Passieren der Blende wirkt nur noch das magnetische Feld.
Begründen Sie, dass sich die Teilchen auf einem Kreisbogen bewegen.

Berechnen Sie die spezifische elektrische Ladung $\frac{Q_{Ion}}{m_{Ion}}$ der Ionen für den Fall, dass der Radius des Kreisbogens 2,1 cm beträgt. Gehen Sie vom Kräfteansatz aus und stellen Sie Zwischenschritte Ihrer Berechnung dar.