Lösung Aufgabe Nr. 1

a) Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2} = 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2} = 1-4x^{-1}+3x^{-2}$ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Nullstellen:

$\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0$ $\underline{N_1(1/0),\ \ N_2(3/0)}$

Asymptoten:

für $x\to 0, x<0$ gilt: $f(x)\to+\infty$ Polstelle $x_3 = 0$

für $x\to 0, x>0$ gilt: $f(x)\to+\infty$ ohne VZW $\Rightarrow$ <u>x = 0 Gl. der vertikalen Asymptote</u>

$1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}1$ $\Rightarrow$ <u>y = 1 Gl. der horizontalen Asymptote</u>

Ableitungen:

$f'(x)=4x^{-2}-6x^{-3}=\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$ $f''(x)=-8x^{-3}+18x^{-4}=-\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{18}{x^4}$

($f'''(x)=24x^{-4}-72x^{-5}=\dfrac{24}{x^4}-\dfrac{72}{x^5}$)

Extremalstelle:

$f'(x)=0:\ \dfrac{4x-6}{x^3}=0\Rightarrow 4x-6=0 \ \Rightarrow x_4=\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$ globaler TP bei $\underline{\left(\dfrac{3}{2}\middle|-\dfrac{1}{3}\right)}$, da $f''(\tfrac{3}{2})>0$

Wendepunkt:

$f''(x)=0:\ \dfrac{-8x+18}{x^4}=0 \ \Rightarrow\ -8x+18=0\Rightarrow x_5=\dfrac{9}{4}$ $\Rightarrow$ $\underline{WP\left(\dfrac{9}{4}\middle|-\dfrac{5}{27}\right)}$, da $f'''(\tfrac{9}{4})\neq 0$

(Begründung auch ohne 3. Ableitungsfunktion möglich)

Normale, Bildgerade:

b) $f'(1)=-2=m_t \ \Rightarrow\ m_n=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ n: y=\dfrac{1}{2}x+c$, da $(1/0)\in G_n$ $\Rightarrow$ $\underline{n: y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}}$

Die gespiegelte Gerade geht durch die 2. Nullstelle: $\underline{h: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}}$

c) $A_{Rechteck}=\text{Höhe}\cdot\text{Breite}=n(x)\cdot[2-2(x-1)]$ (die Länge der Basis beträgt 2)

$A(x)=(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2})\cdot(4-2x)=2x-x^2-2+x$ $\Rightarrow$ $A(x)=-x^2+3x-2$

$A'(x)=-2x+3\ \Rightarrow\ A'(x)=0\Rightarrow -2x+3=0\Rightarrow x_6=\dfrac{3}{2}\Rightarrow A(\tfrac{3}{2})$ glob. Max., da $A''(\tfrac{3}{2})<0\Rightarrow$

$\underline{A(\tfrac{3}{2})=\dfrac{1}{4}}$

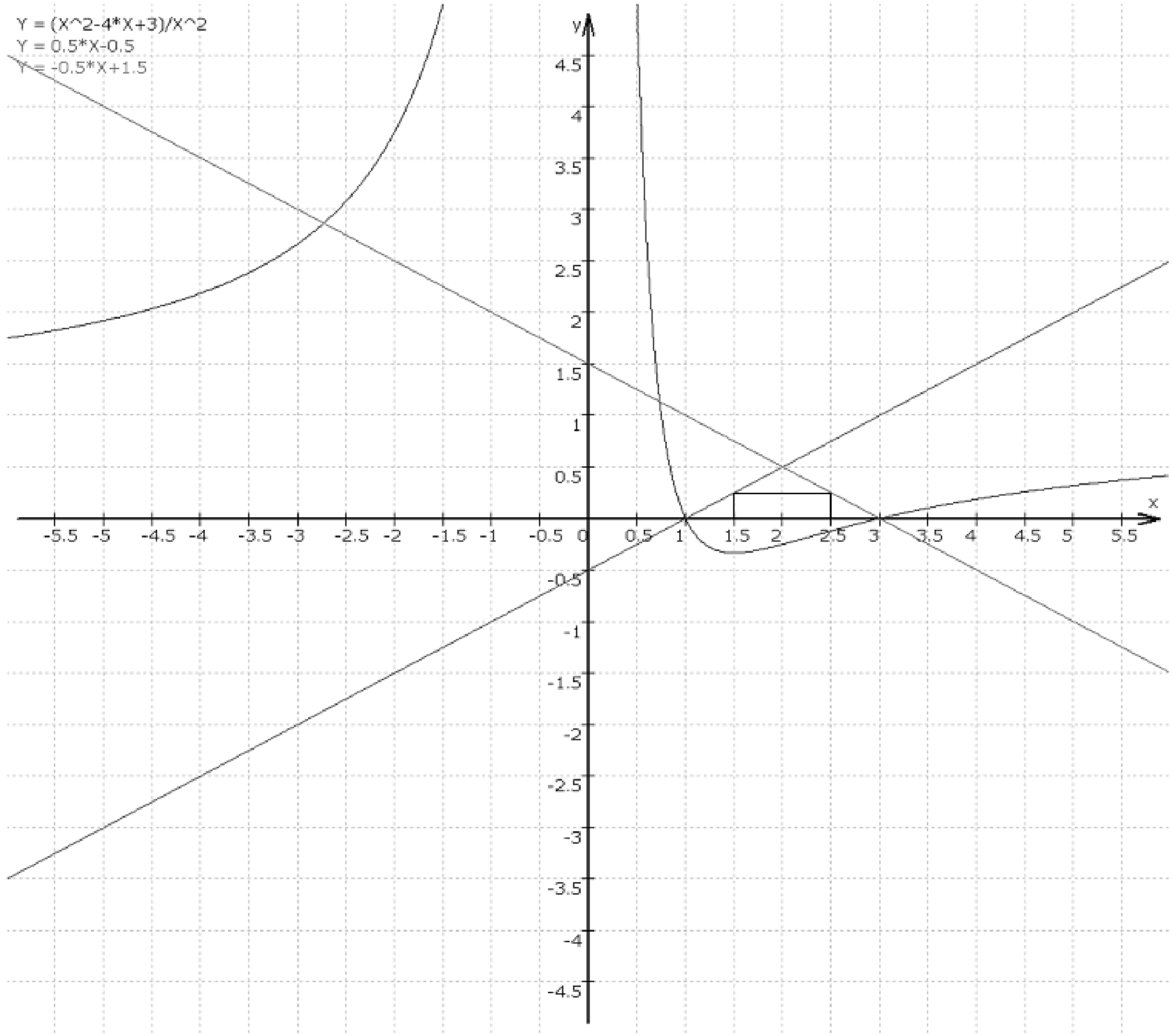
Fortsetzung Lösung Nr. 1:

d) Schnittpunkt der horizontalen Asymptoten mit G_f: $1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}=1 \;\Rightarrow\; x_7=\frac{3}{4} \;\Rightarrow S\left(\frac{3}{4}\middle|1\right)$

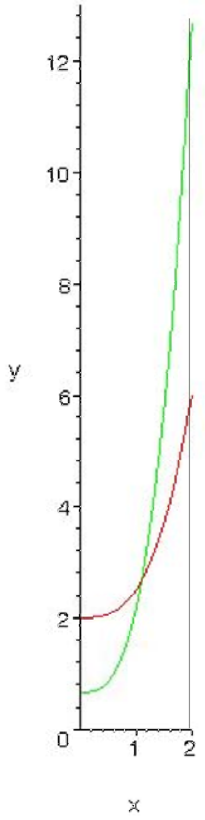
$$A(b)=\int_{\frac{3}{4}}^{b}\left(1-(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})\right)dx=\int_{\frac{3}{4}}^{b}\left(\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\left[4\ln|x|+\frac{3}{x}\right]_{\frac{3}{4}}^{b} \;\Rightarrow\; A(b)=\left(4\ln b+\frac{3}{b}\right)-\left(4\ln\frac{3}{4}+4\right)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{b\to\infty} A(b)$ **existiert nicht**, da der Graph von y = ln x streng monoton wachsend ist.

Graph



Lösung Aufgabe Nr. 3



a) $\frac{1}{2}x^3+2=\frac{3}{2}x^3+\frac{2}{3}$

Schnittpunkt S: $x_S = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = 1.1006...$; $y_S = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+2=\frac{8}{3} = 2.\overline{6}$

b) $F(p) = \int_0^2 (p\,x^3+\frac{1}{p})dx=\left[p\frac{x^4}{4}+\frac{1}{p}x\right]_0^2 = \underline{\underline{4p + \frac{2}{p}}}$

c) Minimum: $\frac{dF(p)}{dp} = 4 - \frac{2}{p^2} = 0$ für $p_o = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707...$; $\left.\frac{dF^2(p)}{dp^2}\right|_{p=p_o} = \frac{4}{(p_o)^3} = \frac{16}{\sqrt{2}} > 0$:

Minimum bei $\underline{p_o = 0.707...}$

d) $V_p = \pi\cdot\int_0^2 (px^3+\frac{1}{p})^2dx = \pi\cdot\int_0^2 (p^2x^6+2x^3+\frac{1}{p^2})dx =$

$$= \pi\cdot\left[p^2\cdot\frac{x^7}{7}+2\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1}{p^2}\cdot x\right]_0^2 = \underline{\underline{\pi\cdot\left(\frac{128}{7}\cdot p^2+8+2\cdot\frac{1}{p^2}\right)}}$$

Lösung Aufgabe Nr. 2

a) Die Seitenvektoren $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ haben die Längen $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$,

$\overline{AC} = 12$ und $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$. Die Strecken AB und BC stehen senkrecht aufeinander:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$$

b) Parametergleichung der Ebene: $\vec{r} = \vec{r_A} + u \cdot \vec{AB} + v \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Durch Elimination der Parameter u und v erhält man die Koordinatengleichung der Ebene <u>E: x + 2y + 2z - 1 = 0</u>

[Alternative Lösung mit dem Vektorprodukt]

c) Der Mittelpunkt der Strecke AC ist M(3|-1|0), wegen

$$\vec{r_M} = \tfrac{1}{2} \cdot (\vec{r_A} + \vec{r_C}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt P muss gelten: $\vec{BM} = \tfrac{1}{2} \cdot \vec{BP}$:

$$\begin{array}{rcl} 3 + 1 &=& \tfrac{1}{2} \cdot (p_x + 1) \Rightarrow p_x = 7 \\ -1 + 3 &=& \tfrac{1}{2} \cdot (p_y + 3) \Rightarrow p_y = 1 \\ 0 - 4 &=& \tfrac{1}{2} \cdot (p_z - 4) \Rightarrow p_z = -4 \end{array}$$

Der gesuchte Punkt ist <u>P(7|1|-4)</u>.

d) Es ist

$$\overline{BD} = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9 \text{ und}$$

$$\overline{BM} = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

Die Fläche des Vierecks ABCD setzt sich aus den Dreiecksflächen ABC und ACD zusammen, wobei das Dreieck ABC die Höhe $\overline{BM}$ = 6 hat und das Dreieck ACD die halb so lange Höhe $\overline{MD} = \overline{BD} - \overline{BM}$ = 3. Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ABC berechnet sich aus dem halben Produkt der Katheten. Also ist der Inhalt des Dreiecks ACD wegen gleicher Grundlinie AC halb so gross wie der Inhalt von Dreieck ABC:

$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{2}\cdot 6\cdot\sqrt{2} = 36$ und damit ist die gesuchte Fläche des Vierecks

$\underline{F} = 36 + 18 = \underline{54}$.

e) Die Normale durch M hat die Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Länge der Viereck-Diagonalen AC ist 12. Die Punkte R und S ergeben sich, wenn man vom Punkt M aus senkrecht zur Ebene auf beide Seiten den Normalenvektor mit der Länge der halben Diagonalen 6 abträgt. Man erhält diesen Normalenvektor aus:

$\left|\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \lambda\cdot\sqrt{1+2+2} = 3\cdot\lambda = 6$; mit λ = 2 ergibt sich der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und daraus die

Ortsvektoren $\vec{r}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und

$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Die gesuchten Punkte des Quadrates sind <u>R(5|3|4) und S(1|-5|-4)</u>.

Lösung Aufgabe Nr. 4

Zufallvariable X: grösste der drei gewürfelten Ziffern, nimmt Werte x = 1, 2, ... ,6 an.

A: 1	B: 1	C: 1
2	2	1
3	3	3
4	4	3
5	4	5
6	4	5

a) P (x = 1) = P(A zeigt 1 $\wedge$ B zeigt 1 $\wedge$ C zeigt 1) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{108}}}$

b) P (x = 5) = P(A zeigt 5 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 5) + P(A zeigt < 5 $\wedge$ C zeigt 5) = $\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{7}{18}}}$

c) P (x = 4) = P(A zeigt 4 $\wedge$ B zeigt $\leq$ 4 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 4) + P(A zeigt < 4 $\wedge$ B zeigt 4 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 4) = $\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{18}+\frac{3}{18}=\frac{5}{18}=\frac{30}{108}$, also P (A zeigt 4 $\wedge$ x = 4) = $\frac{2}{18}$

Damit wird die bedingte W'keit P (A zeigt 4 | x = 4) = $\frac{\frac{2}{18}}{\frac{30}{108}}=\underline{\underline{\frac{2}{5}}}$

d) Für die Verteilung von X fehlen noch die Werte für x = 2, x = 3 und x = 6:

P (x = 2) = P(A zeigt 2 $\wedge$ B zeigt $\leq$ 2 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 2) + P(A zeigt < 2 $\wedge$ B zeigt 2 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 2) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}=\frac{3}{108}$

P (x = 3) = P(A zeigt 3 $\wedge$ B zeigt $\leq$ 3 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 3) + P(A zeigt < 3 $\wedge$ B zeigt 3 $\wedge$ C zeigt $\leq$ 3) + P(A zeigt < 3 $\wedge$ B zeigt < 3 $\wedge$ C zeigt 3) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{54}=\frac{14}{108}$

P(x = 6) = $\frac{1}{6}=\frac{18}{108}$. X hat also die Verteilung

X	1	2	3	4	5	6
108 · p(x)	1	3	14	30	42	18

Kontrolle: Summe der Wahrscheinlichkeiten ist 1.

e) Erwartungswert μ = E(X) = $\frac{1}{108}(1 + 6 + 42 + 120 + 210 + 108) = \underline{\underline{\frac{487}{108}}} \approx \underline{4.509}$

f) Binomische Verteilung mit n = 10 und p = $\frac{7}{18}$.

P (X nimmt genau viermal den Wert 5 an) = $\binom{10}{4}\left(\frac{7}{18}\right)^4\left(\frac{11}{18}\right)^6 \approx \underline{0.25017}$

Lösung Aufgabe Nr. 5

a) Ansatz für k: $(x-1)^2 + (y+4)^2 = r^2$. Einsetzen der Koordinaten von P(-8|5) liefert
$(-9)^2 + (9)^2 = 162 = r^2$.

Gleichung k: $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 162$ und der Radius von k ist also $r = 9\sqrt{2}$.

Der Vektor von M nach P hat die Komponenten $\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$, ist also parallel $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also Ansatz für Tangente t: $-x + y + C = 0$
Einsetzen der Koordinaten von P(-8|5) liefert $C = -13$

$\underline{t: -x + y + C = 0}$

(Die Gleichung von t erhält man auch durch "Linearisierung" der Gleichung von k)

b) Einsetzen von $y = \sqrt{3}\,x + n$ in die Gleichung $x^2 + y^2 = 100$ erzeugt die quadratische Gleichung $4x^2 + 2\sqrt{3}\,n\,x + n^2 - 100 = 0$.
Mit Diskriminantenmethode (einelementige Schnittmenge) folgt
$D = 12n^2 - 16(n^2 - 100) = -4n^2 + 1600 := 0$. Also kann n die beiden Werte $\underline{-20}$ und $\underline{+20}$ annehmen.

c1) Unendliche geometrische Reihe mit $a_1 = 1$ und $q = x - 1$
Für Konvergenz muss $-1 < q < 1$ mit $q \neq 0$
Also $-1 < x - 1 < 1$ mit $x \neq 1$
Für x gilt daher: $\underline{0 < x < 2 \text{ und } x \neq 1}$

c2) Dann lässt sich die Summe s bestimmen zu $s = \dfrac{1}{1-(x-1)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2-x}}}$

c3) $f(x) := \dfrac{1}{2-x}$ mit $0 < x < 2$ und $x \neq 1$
Der Graph G_f ist in diesem Bereich von x ein Stück einer Hyperbel, monoton steigend, vertikale Asymptote mit Gleichung $x = 2$. Wegen der Definitionslücke 1 kann s den Wert $\dfrac{1}{2-1} = 1$ nicht annehmen.
Die Wertemenge von f ist daher $\underline{W =]0.5, \rightarrow [\setminus \{1\}}$

bzw. für die Summe s gilt $\underline{s > 0.5,\ s \neq 1}$.