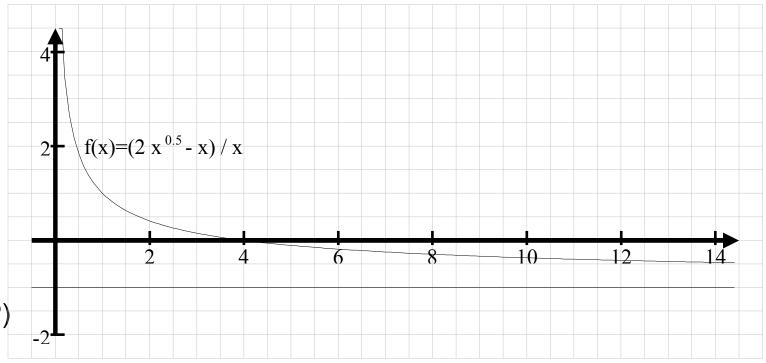
M a t h e m a t i k Grundlagen Lösungen

Lösung der Aufgabe 1:

a) <u>Nullstelle:</u> $2\sqrt{x_0} - x_0 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x_0}$, da $x_0 > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = 4}}$

<u>Asymptoten:</u> senkrechte Asymptote bei $\underline{\underline{x = 0}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x} - x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2}{\sqrt{x}} - 1) = -1 \Rightarrow$ horizontale Asymptote $\underline{\underline{y = -1}}$



(2P)

b) $\underline{\underline{A(p)}} = \int_p^4 f(x)dx = \int_p^4 \frac{2\sqrt{x} - x}{x} dx = \int_p^4 (\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)dx = \int_p^4 (2x^{-\frac{1}{2}} - 1)dx = [4x^{\frac{1}{2}} - x]_p^4 = [4\sqrt{x} - x]_p^4$

$= 4 \cdot 2 - 4 - (4\sqrt{p} - p) = \underline{\underline{4 - 4\sqrt{p} + p}} \Rightarrow \underline{\underline{\lim\limits_{p\to 0} A(p)}} = \lim\limits_{p\to 0}(4 - 4\sqrt{p} + p) = \underline{\underline{4}}$ (3P)

c) <u>Zielfunktion:</u> Flächeninhalt von R: $F(x,y) = x \cdot y$

<u>Nebenbedingung:</u> $y = f(x) = \frac{2\sqrt{x} - x}{x} \Rightarrow F(x) = x \cdot \frac{2\sqrt{x} - x}{x} = 2\sqrt{x} - x$, ID =]0,4]

<u>Lokale Maxima:</u> $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1$

$F''(x) = (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)' = (x^{-\frac{1}{2}} - 1)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow F''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x = 1$ lokales Maximum

<u>Ränder von ID:</u> $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2\sqrt{x} - x) = 0$, $F(4) = 2\sqrt{4} - 4 = 0$, $F(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 1$

$\Rightarrow x = 1$ globales Maximum

$y = f(1) = \frac{2\sqrt{1} - 1}{1} = 1 \Rightarrow$ Beim Punkt $\underline{\underline{P(1|1)}}$ ist der Flächeninhalt von R am grössten. (3P)

d) $\underline{\underline{V}} = \pi \cdot \int_4^9 f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{2\sqrt{x} - x}{x})^2 dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^2 dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{4}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 1)dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{4}{x} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 1)dx =$

$= \pi \cdot [4 \cdot \ln x - 8x^{\frac{1}{2}} + x]_4^9 = \pi \cdot [4 \cdot \ln 9 - 8\sqrt{9} + 9 - (4 \cdot \ln 4 - 8\sqrt{4} + 4)] = \pi \cdot [4 \cdot (\ln 9 - \ln 4) - 3] = \underline{\underline{0.765...}}$ (2P)

Lösung der Aufgabe 2:

a) $\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-5\\-5-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-11\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-10\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-8\end{pmatrix}$, also $\underline{\underline{F(4|4|-10)}}$ und $\underline{\underline{G(2|0|-8)}}$ (2P)

b) Parametergleichung von ε:

$$\underline{\underline{\vec{r}}}=\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\5\\6\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3-(-2)\\6-5\\1-6\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1-(-2)\\2-5\\3-6\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\\5\\6\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}5\\1\\-5\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}}}$$

Koordinatengleichung von ε:

$$\left|\begin{array}{l}x=-2+5u+3v\\y=5+u-3v\\z=6-5u-3v\end{array}\right|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \\ \cdot 1\end{array}\quad\Rightarrow x+z=4\Rightarrow\underline{\underline{x+z-4=0}}$$ (2P)

c) $$\cos(\phi)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}}{\overline{AC}\cdot\overline{AE}}=\frac{\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-11\end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+(-11)^2}}=\frac{3+6+33}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{126}}=\frac{42}{9\sqrt{42}}=\frac{\sqrt{42}}{9}=0.720...$$

$\Rightarrow\ \underline{\underline{\phi=43.938...^\circ}}$ (1P)

d) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\1\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1-3\\2-6\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$ Es gilt $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}=-6+12-6=0$. Also steht AC rechtwinklig zu BC und der rechte Winkel ist bei C. (1P)

e) Normale n zu ε durch E:

$\varepsilon: x+z-4=0\Rightarrow\vec{n}_\varepsilon=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Richtungsvektor von n $\Rightarrow$ $n:\vec{r}=\overrightarrow{OE}+t\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\underline{n\cap\varepsilon:}$ $(-1+t)+(-5+t)-4=0\Rightarrow 2t=10\Rightarrow t=5\ \Rightarrow\ n:\vec{r}_H=\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{\underline{H(4\,|\,3\,|\,0)}}$

$\underline{\underline{h=\overline{HE}}}=\sqrt{(-1-4)^2+(3-3)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{50}\underline{\underline{=5\sqrt{2}\approx 7.07}}$ (2P)

f) $\underline{\underline{F_{ABC}}}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{24}\underline{\underline{=9\sqrt{2}=12.727...}}$

$\underline{\underline{V_{ABCEFG}}}=G\cdot h=F_{ABC}\cdot\overline{FS}=\cdot 9\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\underline{\underline{=90}}$ (2P)

Lösung der Aufgabe 3:

a) P (3mal positiv) = 0.5^3 = <u>0.125</u> (1P)

b) Summe $\geq$ 16 : +6+6+6 , +6+6+4 , +6+4+6 , +4+6+6 . (1P)

P (mindestens Summe 16) = $\frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}$ = <u>0.0185...</u>

c) Summe = 0 : +6 –5 –1 (in jeder Reihenfolge, 6mal) (2P)

+6 –3 –3 (3mal)

+4 –3 –1 (6mal)

+2 –1 –1 (3mal) $\rightarrow$ total 18 günstige Ereignisse, bzw. Pfade im Baum

P (Summe 0) = $\frac{18}{216} = \frac{1}{12}$

d) Binomialverteilung mit n = 10 und p = 0.5 X = Anzahl positiver Zahlen (2P)

P (X $\geq$ 2) = 1 – P (X=0) – P (X=1) = $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1013}{1024}$ = <u>0.989...</u>

e) P (rot) = $\frac{1}{3}$ (2P)

P (mindestens 1mal rot in n Würfen) = 1 – P (keinmal rot) = $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0.99$

$\Rightarrow 0.01 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \Rightarrow \quad n \geq 11.357...$ Man muss <u>mindestens 12mal</u> werfen.

f) Verteilung: (2P)

P (3mal positiv) = $\frac{1}{8}$ $\rightarrow$ 9 Franken Auszahlung

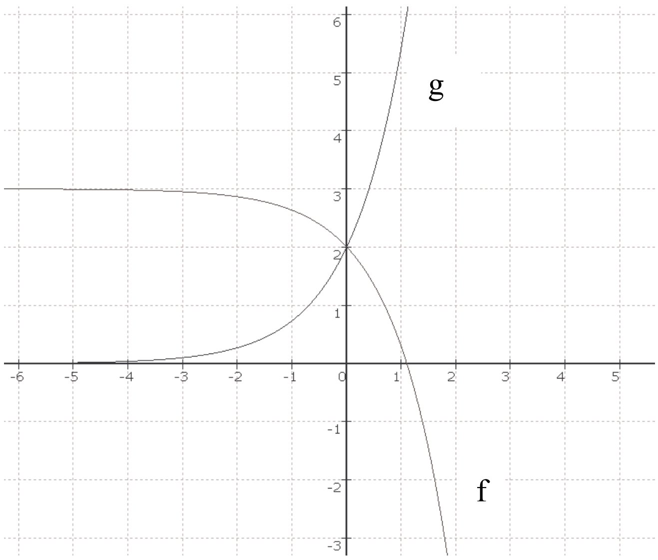
P (2mal positiv) = $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ 6 Franken Auszahlung

P (1mal positiv) = $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ 3 Franken Auszahlung

Erwartete Auszahlung E = $\frac{1 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3}{8} = \frac{36}{8}$ = 4.5 (Franken)

Es muss mit einem <u>Verlust von 0.5 Franken</u> gerechnet werden.

Lösung der Aufgabe 4:



a) Vergleiche Abbildung ! (2P)

b) $2e^x = -e^x + 3 \quad \big| + e^x$

$3e^x = 3 \quad \big| : 3 \quad \Rightarrow \underline{S(0|2)}$ (2P)

$e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Nullstelle:

$-e^x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; e^x = 3 \;|\; \ln$

$\underline{x_0 = \ln 3} = 1.098...$

c) $A = \lim\limits_{b\to-\infty} \int_b^0 2e^x dx + \int_0^{\ln 3} (-e^x + 3) dx$ (3P)

$$\int_b^0 2e^x dx = \left[2e^x\right]_b^0 = 2e^0 - 2e^b = 2 - 2e^b \quad \Rightarrow \quad \lim_{b\to-\infty}(2 - 2\cdot e^b) = 2$$

$$\int_0^{\ln 3} (-e^x + 3) dx = \left[-e^x + 3x\right]_0^{\ln 3} = (-e^{\ln 3} + 3\cdot\ln 3) - (-e^0 + 0) = -3 + 3\cdot\ln 3 + 1 = 3\cdot\ln 3 - 2$$

$A_{Total} = 2 + 3\cdot\ln 3 - 2 = \underline{3\cdot\ln 3} = 3.295...$

d) $g: y = 2\cdot e^{tx} \quad \Rightarrow \quad P(0\,|\,2)$ (3P)

Tangente: $g'(x) = 2\cdot t\cdot e^{t\cdot x} \Rightarrow g'(0) = 2t = m_t \;\Rightarrow\; \underline{t: y = 2t\cdot x + 2}$, weil q = f(0) = 2

Normale: $m_t \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = -\frac{1}{2t} \quad \Rightarrow \quad \underline{n: y = -\frac{1}{2t}\cdot x + 2}$

Nullstelle der Tangente: $2\cdot t\cdot x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{t}$

Nullstelle der Normalen: $-\frac{1}{2t}x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4t$

$$A_\Delta(t) = \frac{(x_2 - x_1)\cdot 2}{2} = \frac{\left(4t - (-\frac{1}{t})\right)\cdot 2}{2} = \underline{4t + \frac{1}{t}}$$

Lösung der Kurzaufgaben:

a) Gerade g=(PQ):

$$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{6-2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow g: y = -\frac{1}{4}x + b \overset{P(2|4)}{\Rightarrow} 4 = -\frac{1}{4}\cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{9}{2} \Rightarrow g: y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

Normale n zu t durch B:

$B(-10|y_B) \in t \Rightarrow y_B = -2\cdot(-10) - 19 = 1 \Rightarrow B(-10|1)$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2} \Rightarrow n: y = \frac{1}{2}x + b \overset{B(-10|1)}{\Rightarrow} 1 = \frac{1}{2}\cdot(-10) + b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow n: y = \frac{1}{2}x + 6$$

n∩g: $\frac{1}{2}x + 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x + 24 = -x + 18 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2 \overset{n:}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2}\cdot(-2) + 6 = 5 \Rightarrow M(-2\,|\,5)$

Radius: $r = \overline{MB} = \sqrt{(-10-(-2))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 8.944...$

Gleichung von k: $k: (x+2)^2 + (y-5)^2 = 80$ (5P)

b) $s(0.4) = \sum_{i=1}^{\infty} 2\cdot 0.4^{i-1} = 2\cdot\frac{1}{1-0.4} = \frac{2}{0.6} = \frac{10}{3}$, da $q = 0.4 < 1$

$$s_n(0.4) = 2\cdot\frac{1-0.4^n}{1-0.4} = \frac{2}{0.6}\cdot(1-0.4^n) = \frac{10}{3}\cdot(1-0.4^n)$$

$$s(0.4) - s_n(0.4) \le 0.000000001\cdot s(0.4) \Rightarrow (1-0.000000001)\cdot s(0.4) \le s_n(0.4)$$

$$\Rightarrow 0.999999999\cdot\frac{10}{3} \le \frac{10}{3}\cdot(1-0.4^n) \Rightarrow 0.999999999 \le 1-0.4^n$$

$$\Rightarrow 0.4^n \le 1-0.999999999 = 0.000000001 \quad |\ln \Rightarrow n\cdot\ln(0.4) \le \ln(0.000000001) \qquad |:\ln(0.4) < 0$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{\ln(0.000000001)}{\ln(0.4)} = 22.616... \Rightarrow n = 23$$ (5P)