

M a t h e m a t i k Grundlagenfach: Lösungen**Lösung der Aufgabe 1**

1. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$

a) $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$ (Verhalten abhängig von $\frac{1}{9}x^3$)

Nullstellen: $x^2\left(\frac{1}{9}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 9$

Extrem- und Wendepunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2 \quad f'''(x) = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = 0: \frac{1}{3}x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \vee x_4 = 6$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow H(0|0)$$

$$f''(6) = 10 > 0 \Rightarrow T(6|-12)$$

$$f''(x) = 0: \frac{2}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow x_5 = 3$$

$$f'''(3) \neq 0 \Rightarrow W(3|-6)$$

b) t: $y = mx + c \quad m = f'(3) = -3$

$$W \in t: -6 = -3 \cdot 3 + c \Rightarrow c = 3 \Rightarrow t: y = -3x + 3$$

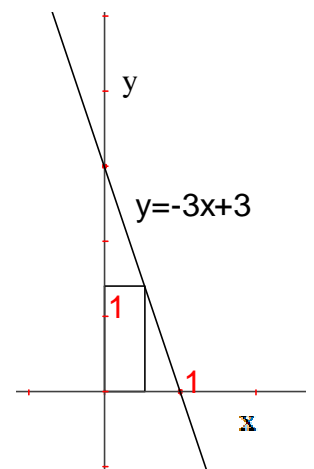
Schnittpunkt mit y-Achse: (0|3)

Schnittpunkt mit x-Achse: $-3x + 3 = 0 \Rightarrow (1|0)$

c) $A(x) = x \cdot (-3x + 3) = -3x^2 + 3x$

$$A'(x) = -6x + 3, \quad A''(x) = -6$$

$$A'(x) = 0: -6x + 3 = 0 \Rightarrow x_6 = 0.5 \Rightarrow A(0.5) = 0.75$$



d) $f_a(x) = ax^3 - x^2 \quad a > 0$

$$f'_a(x) = 3ax^2 - 2x \quad f''_a(x) = 6ax - 2$$

$$f'_a(x) = 0: 3ax^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3ax - 2) = 0 \Rightarrow x_7 = 0 \vee x_8 = \frac{2}{3a}$$

$$f''_a\left(\frac{2}{3a}\right) = 2 > 0 \Rightarrow T\left(\frac{2}{3a} \mid -\frac{4}{27a^2}\right)$$

$$f_a\left(\frac{2}{3a}\right) = a\left(\frac{2}{3a}\right)^3 - \left(\frac{2}{3a}\right)^2 = \frac{8}{27a^2} - \frac{4}{9a^2} = \frac{8-4\cdot 3}{27a^2} = -\frac{4}{27a^2}$$

$$T\left(\frac{2}{3a} \mid -\frac{4}{27a^2}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{3a} \Rightarrow a = \frac{2}{3x}$$

$$y = -\frac{4}{27a^2} = -\frac{4}{27\left(\frac{2}{3x}\right)^2} = -\frac{x^2}{3} \Rightarrow \text{Gleichung der Ortslinie: } y = -\frac{x^2}{3}$$

Lösung der Aufgabe 2:

2. a) Verteilung

ω_i	(0/0) (0/1), (1/0) (0/3), (3/0) (0/9), (9/0)	(1/1)	(1/3), (3/1)	(1/9), (9/1) (3/3)	(3/9), (9/3)	(9/9)
x_i	-3	-2	0	6	24	78
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$b) E(X) = -3 \cdot \frac{7}{16} + (-2) \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{2}{16} + 6 \cdot \frac{3}{16} + 24 \cdot \frac{2}{16} + 78 \cdot \frac{1}{16} = \frac{121}{16}$$

$$c) P(\text{"keinmal Null"}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$d) P(3 \cdot 3 | Fr. 9) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$e) A: p = \frac{1}{8}, q = \frac{7}{8}, n = 10 \quad P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^7 \approx 0.0920$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^7 \approx 5.9921 \cdot 10^{-6}$$

$$f) 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n \geq 0.9 \quad \Rightarrow \quad 0.1 \geq \left(\frac{7}{8}\right)^n \quad || \lg$$

$$\Rightarrow \lg(0.1) \geq n \cdot \lg\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\lg(0.1)}{\lg\left(\frac{7}{8}\right)} \leq n \quad \Rightarrow \quad n \geq 18$$

Lösung der Aufgabe 3:

a) Für den Neigungswinkel gilt $\tan(180^\circ - \frac{\alpha}{2}) = f'(1)$

$$f'(x) = -\frac{3x-1}{2\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad f'(1) = -1$$

und damit $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$.

b) Grösste Breite bei der Maximalstelle:

$$f'(x) = -\frac{3x-1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Die maximale Breite b ist dann

$$b = 2 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.7698$$

c) Fläche zwischen k und k' :

$$f(x) = \sqrt{x} - x\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = \int f(x) dx = \frac{2x\sqrt{x}(5-3x)}{15}$$

Für die Fläche gilt dann:

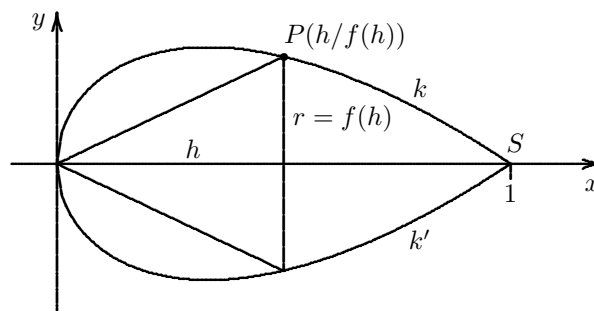
$$A = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \left[\frac{2x\sqrt{x}(5-3x)}{15} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{2 \cdot 2}{15} - 0 \right) = \frac{8}{15}$$

d) Rotationsvolumen mit Grenzen 0 und 1:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 [(1-x) \cdot \sqrt{x}]^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{12} = 0.2618$$

e) Für das Volumen des Kegels gilt:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Für den Radius erhalten wir gemäss Skizze $r = f(h)$ als Nebenbedingung:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi f(h)^2 h = \frac{1}{3}\pi [(1-h) \cdot \sqrt{h}]^2 h$$

Damit dieses Volumen ein Maximum annimmt, muss $V'(h) = 0$:

$$V'(h) = \pi \cdot \left(\frac{4h^3}{3} - 2h^2 + \frac{2h}{3} \right) \quad \rightarrow \quad h_1 = 0; \quad h_2 = \frac{1}{2}; \quad h_3 = 1$$

Nur $h = \frac{1}{2}$ kann eine Lösung für das Maximum sein, da bei $h = 0$ das Volumen null ist, da es keine Höhe hat. Bei $h = 1$ ist $r = 0$, also das Volumen auch 0.

Lösung der Aufgabe 4

a) Der grösste Winkel liegt gegenüber der grössten Seite:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{mit } \overline{AB} = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{53}; \quad \overline{AC} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} \\ \overline{BC} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}.$$

Damit ist der $\gamma = \sphericalangle(\vec{CA}, \vec{CB})$ der grösste Winkel:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \frac{-9 + 5 + 20}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{35}} = 0.3824 \quad \rightarrow \quad \gamma = 67.513^\circ$$

Für den Flächeninhalt der Grundfläche gilt:

$$G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{35} \cdot \sin 67.513^\circ = 19.33$$

b) Eine Parametergleichung für die Ebene durch A , B und C lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + u \cdot \vec{AB} + v \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt dann das Komponentengleichungssystem:
$$\begin{cases} x = -2 + 6u + 3v \\ y = 3 - 4u - 5v \\ z = 1 + u - 4v \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{I : } \begin{cases} x = -2 + 6u + 3v \\ y = 3 - 4u - 5v \\ z = 1 + u - 4v \end{cases} \\ \text{II : } \\ \text{III : } \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{2 \cdot \text{I} + 3 \cdot \text{II}} \\ \xrightarrow{\text{I} - 6 \cdot \text{III}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{IV : } \begin{cases} 2x + 3y = 5 - 9v \\ x - 6z = -8 + 27v \end{cases} \\ \text{V : } \end{array}$$

$$\xrightarrow{3 \cdot \text{IV} + \text{V}} \quad 3(2x + 3y) + x - 6z = 15 - 8$$

$$\rightarrow 7x + 9y - 6z - 7 = 0 \quad \text{oder} \quad -7x - 9y + 6z + 7 = 0$$

c) Für den Schwerpunkt gilt:

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 + 4 + 1 \\ 3 - 1 - 2 \\ 1 + 2 - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad S(1/0/0)$$

Damit erhalten wir für die Parametergleichung der Normalen zu ABC durch S :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die Ebenengleichung von ε :

$$3(1 + 7t) - 2 \cdot 9t - 6t - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad t = -1$$

Den Parameterwert in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt die Komponenten von \vec{OD} :

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow D(-6/-9/6)$$

d) Die Höhe h folgt aus Länge von $\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$h = |SD| = \sqrt{(-7)^2 + (-9)^2 + 6^2} = \sqrt{166} = 12.884$$

Mit der Grundfläche aus a):

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 83$$

Das Volumen beträgt 83 VE.

e) $A' = A$. D spiegeln:

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(oder $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + 2 \cdot \overrightarrow{DS}$)

Für die gespiegelte Gerade ist dann A Stützpunkt und $\overrightarrow{AD'}$ der Richtungsvektor

$$g' : \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AD'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe 5a

Einzelwahrscheinlichkeit von A ist $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, diejenige von B ist $\frac{1}{6}$.

$P(\text{A gewinnt Spiel}) = P(\text{A trifft im 1. Wurf}) + P(\text{A trifft genau in seinem 2. Wurf}) + P(\text{A trifft genau in seinem 3. Wurf}) + \dots =$

$$= \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9} + \dots$$

Unendliche geometrische Reihe mit $a_1 = \frac{1}{9}$ und $q = \frac{20}{27}$

$$\text{Daher gilt: } \underline{P(\text{A gewinnt Spiel})} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{20}{27}} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

Lösung der Aufgabe 5b

Mittelpunkt $M(0|0)$ und Radius $R=2$ von k .

Die Normale n zur Geraden t durch M hat daher die Gleichung $n: y = \sqrt{3}x$

Schnitt von n mit $k: x^2 + 3x^2 = 4$, also $B_1: x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$ und $B_2: x_2 = -1, y_2 = -\sqrt{3}$

$$B_1 \in t: \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + q_1, \text{ damit } q_1 = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}}}$$

$$\text{Analog für } B_2 \text{ (bzw. aus Symmetriegründen)} \quad q_2 = \underline{\underline{-\frac{4}{\sqrt{3}}}}$$

Lösung der Aufgabe 5c

Partielle Integration von $\int x \ln(x) dx$: $u' = x, v = \ln x \rightarrow u = \frac{x^2}{2}, v' = \frac{1}{x}$

$$\text{Also ist } \int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\text{Damit ist } \int_1^e x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \underline{\underline{\frac{e^2 + 1}{4}}}$$