

Kantonsschule Reussbühl

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Bernhard Berchtold Peter Büchel Hannes Ernst Yves Gärtner Felix Huber
Klassen	6a/6b/6c/6d/6e/6K
Prüfungsdatum	27. Mai 2011
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	Fundamentum Mathematik und Physik Taschenrechner TI 83+ bzw. TI voyage200
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1 : 10 Aufgabe 2 : 10 Aufgabe 3 : 10 Aufgabe 4 : 4 Aufgabe 5 : 6 Aufgabe 6 : 10 <hr/> Total : 50 Für 42 Punkte wird die Note 6 erteilt (Notenskala linear)
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

1 Differential- und Integralrechnung I**[10]**

Gegeben ist die Parabelschar mit der Funktionsgleichung

$$f_a(x) = \frac{2-a}{a} \cdot (2ax - x^2) \quad \text{für } 0 < a < 2$$

- Bestimmen Sie für $a = 1$, d.h. für $f_1(x) = 2x - x^2$ die Gleichung der horizontalen Tangente an die Parabel. [1]
- Welche Gerade ist für $a = 1$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -x$ und berührt die Parabel? [2]
- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a . [1]
- Bestimmen Sie a so, dass die Tangenten in den Nullstellen des Graphen senkrecht aufeinander stehen. [2]
- Berechnen Sie den Inhalt des von der Parabel und der x -Achse begrenzten Flächenstücks in Abhängigkeit von a . Für welchen Wert von a wird diese Fläche möglichst gross? [4]

2 Vektorgeometrie**[10]**

Gegeben sind die drei Punkte $A(9/5/-8)$, $B(1/9/0)$ und $C(6/2/4)$.

- Berechnen Sie den Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle BAC$. [2]
- Zeigen Sie, dass der Punkt $H(3/8/-2)$ Höhenfusspunkt der Höhe h_c des Dreiecks ABC ist. [2]
- Geben Sie eine Parametergleichung sowie eine Koordinatengleichung der Ebene $E = (ABC)$ an. [2]
- Spiegeln Sie den Punkt $T(8/11/0)$ an der Ebene E . [2]
- Bestimmen Sie zwei Punkte P und Q in der Ebene E so, dass das Viereck $ABPQ$ ein Quadrat ist. [2]

Es muss für P und Q nur je eine Lösung angegeben werden.

3 Differential- und Integralrechnung II**[10]**

Betrachten Sie die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x}$$

a) Bestimmen Sie die Nullstelle und die Koordinaten des Hochpunktes H . [3]

b) Ein Punkt $P(x/y)$ wandert auf dem Teil des Graphen der Funktion f , der im 1. Quadranten verläuft. $F(x/0)$ ist der Lotfusspunkt von P auf die x -Achse. P , F und der Ursprung O bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, den dieses Dreieck einnehmen kann. [4]

c) Eine Stammfunktion von f hat die Form [2]

$$F(x) = \frac{ax+b}{e^x}$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b , indem Sie $F(x)$ abhängig von a und b ableiten, vereinfachen und mit dem Funktionsterm von f vergleichen.

(zur Kontrolle: $F(x) = \frac{-x-3}{e^x}$)

d) Berechnen Sie im 1. Quadranten den Inhalt des nach rechts unbegrenzten Flächenstückes zwischen dem Graphen von f und der x -Achse. [1]

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung I**[4]**

Eine Urne enthält 3 weisse und 5 schwarze Kugeln. Man zieht zufällig eine erste Kugel und fügt der Urne dann zwei Kugeln der gezogenen Farbe hinzu. Anschliessend zieht man noch eine zweite Kugel.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide gezogenen Kugeln weiss? [1]

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben? [1]

c) Sei W die Anzahl gezogener weisser Kugeln. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für W auf und berechnen Sie den Erwartungswert von W . [2]

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung II

[6]

Bei durchschnittlich 3% einer Bevölkerung tritt ein Symptom K auf.

- a) Man betrachtet nun 60 zufällig ausgewählte Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen höchstens 2 Personen dieses Symptom K ? [1]
- b) Wie viele Personen muss man mindestens betrachten, um mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine zu finden, die das Symptom K aufweist? [2]
- c) Ein Test soll nun zeigen, ob eine bestimmte Person das Symptom K aufweist. Bei Personen, die K besitzen, zeigt der Test dies mit 90% Wahrscheinlichkeit an. Der Test zeigt aber mit 7% fälschlicherweise das Symptom K an, obwohl die Person K nicht aufweist. [3]

Der Test zeige nun bei einer bestimmten Person das Symptom K an. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich das Symptom K besitzt?

6 Unabhängige Kurzaufgaben

[10]

- a) Gegeben ist der Kreis $k : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ und der Punkt $P(-2/15)$. Bestimmen Sie zuerst den Mittelpunkt von k . Berechnen Sie dann die Koordinaten desjenigen Punktes von k , der dem Punkt P am nächsten liegt. [4]
- b) Bestimmen Sie $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ mit Hilfe von partieller Integration. [3]
- c) In der Figur sind die ersten vier einer unendlichen Folge von Quadraten Q_1, Q_2, Q_3, \dots eingezeichnet. Berechnen Sie die Summe dieser unendlich vielen Quadratflächen. [3]

