

1. a) Parabel \Rightarrow horizontale Tangente geht durch den Scheitelpunkt S . Die x -Koordinate des Scheitelpunktes liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen

$$f_1(x) = 2x - x^2 = x(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = 2$$

$$\rightarrow x_s = 1 \quad \Rightarrow \quad S(1/1)$$

$$\rightarrow y = 1$$

(oder mit $f'(x) = 0; \dots$)

- b) Gleiche Steigung wie $y = -x \Rightarrow$ Ansatz: $h(x) = -x + b$

$$\text{Es gilt: } f'_1(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2 - 2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{3}{2}/f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = B\left(\frac{3}{2}/\frac{3}{4}\right)$$

$$f_1(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad 2x - x^2 = -x + b \quad \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \quad b = \frac{9}{4}$$

Geradengleichung:

$$y = -x + \frac{9}{4}$$

- c) $f'_a(x) = 0$

$$f'_a(x) = \frac{2-a}{a} \cdot (2ax - x^2) = \frac{2-a}{a} \cdot x(2a - x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2a$$

- d) Für die Ableitung gilt

$$f'_a(x) = \frac{2-a}{a} \cdot (2a - 2x)$$

Für die Steigungen in den Nullstellen (aus c)) gilt dann

$$f'_a(x_0) = \frac{2-a}{a} \cdot 2a = 2(2-a)$$

und

$$f'_a(x_1) = \frac{2-a}{a} \cdot (2a - 4a) = -2(2-a)$$

Damit die Geraden senkrecht aufeinanderstehen, muss gelten:

$$f'_a(x_0) = -\frac{1}{f'_a(x_1)} \quad \Rightarrow \quad 2(2-a) = \frac{1}{2(2-a)} \quad \Rightarrow \quad (2-a)^2 = \frac{1}{4}$$

$\rightarrow a_1 = \frac{5}{2}; a_2 = \frac{3}{2}$. Wegen $0 < a < 2$ ist nur $a_2 = \frac{3}{2}$ eine Lösung.

- e) Integral mit Nullstellen aus c) als Grenzen. Wegen $\frac{2-a}{a} > 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet und somit liegt die gesuchte Fläche oberhalb der x -Achse. Mit $0 < 2a$ erhalten wir für die Fläche das Integral:

$$F(a) = \frac{2-a}{a} \int_0^{2a} (2ax - x^2) dx = \frac{2-a}{a} \left[2a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{4a^3}{3} = \frac{8a^2}{3} - \frac{4a^3}{3}$$

Fläche extremal:

$$F'(a) = 0 \Rightarrow \frac{16}{3}a - 4a^2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{4}{3}$$

Wegen $a > 0$ ist nur $a_2 = \frac{4}{3}$ eine Lösung.

Maximum:

$$F''(a) = \frac{16}{3} - 8a \Rightarrow F''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} - 8 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{16}{3} < 0 \quad \checkmark$$

2. a) Es gilt

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 12^2} = 9\sqrt{2}$$

und

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 8^2} = 12$$

Für den Winkel gilt dann:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{24 - 12 + 96}{12 \cdot 9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

- b) Der Punkt $H(3/8 / -2)$ liegt auf der Gerade (AB) :

$$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Und:

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -24 - 24 + 48 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$$

c) Parametergleichung:

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OA} + \frac{u}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{v}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left| \begin{array}{l} x = 9 - 2u - v \\ y = 5 + u - v \\ z = -8 + 2u + 4v \end{array} \right| \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}+2\text{II}} \\ \xrightarrow{\text{I}+\text{III}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \left| \begin{array}{l} x + 2y = 19 - 3v \\ x + z = 1 + 3v \end{array} \right| \xrightarrow{\text{IV}+\text{V}} 2x + 2y + z = 20$$

Und damit

$$2x + 2y + z - 20 = 0$$

d) Die Normale zur Ebene E durch den Punkt T

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Koordinatengleichung von d) eingesetzt:

$$2(8 + 2t) + 2(11 + 2t) + t - 20 = 0 \Rightarrow t = -2$$

Und für den gespiegelten Punkt T' mit $t = -4$ (für $t = -2$: $S(4/7/-2)$)

$$\overrightarrow{OT'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow T'(0/3/-4)$$

e) Aus a) $|AB| = 12$. Idee: Bringe den Vektor $\overrightarrow{HC} (\perp \overrightarrow{AB})$ auf Länge 12:

$$|r\overrightarrow{HC}|^2 = 144 \Rightarrow (3r)^2 + (-6r)^2 + (6r)^2 = 144 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$$

Für die Koordinaten von P ergibt sich dann mit $r_1 = \frac{4}{3}$

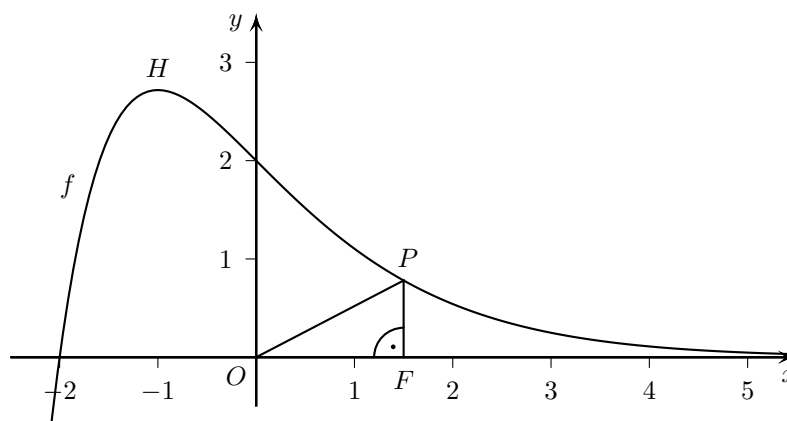
$$\vec{OP} = \vec{OB} + \frac{4}{3} \cdot \vec{HC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow P(5/1/8)$$

und für Q

$$\vec{OQ} = \vec{OA} + \frac{4}{3} \cdot \vec{HC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(13/-3/0)$$

Zweite Lösung: $P'(-3/17/-8)$, $Q'(5/13/-16)$

3. Skizze:



a) Nullstelle:

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x} = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

Extremum (Ableitung mit Quotientenregel):

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x+2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x-2)}{(e^x)^2} = \frac{-x-1}{e^x} = 0 \Rightarrow x=-1$$

$$\rightarrow H(-1/f(-1)) = H(-1/e)$$

b) Zielfunktion ($A = \frac{1}{2} \overline{OF} \cdot \overline{FP}$ in Skizze):

$$A(x) = \frac{1}{2} x f(x) = \frac{1}{2} x \cdot \frac{x+2}{e^x} = \frac{x^2+2x}{2e^x} \quad \text{mit} \quad \mathbb{D} = [0; \infty)$$

Extremum:

$$A'(x) = \frac{(2x+2) \cdot 2e^x - (x^2+2x) \cdot 2e^x}{(2e^x)^2} = \frac{-x^2+2}{2e^x} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Wegen $x \geq 0$ braucht man nur die positive Lösung zu berücksichtigen.

Ränder:

$$A(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0$$

Darum ist

$$A(\sqrt{2}) = \frac{2+2\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}} = \frac{1+1\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \approx 0.5869$$

ein lokales Maximum.

Oder mit der 2. Ableitung:

$$A''(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{2e^x} \Rightarrow A''(\sqrt{2}) = \frac{2 - 2\sqrt{2} - 2}{2e^{\sqrt{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}} < 0 \quad \checkmark$$

c) $F(x)$ ableiten:

$$F'(x) = \frac{ae^x - (ax+b)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-ax+a-b}{e^x}$$

Wegen $F'(x) = f(x)$, Koeffizientenvergleich in den Zählern:

$$\frac{-ax+a-b}{e^x} = \frac{x+2}{e^x} \Rightarrow -a=1; \quad a-b=2 \Rightarrow a=-1; \quad b=-3$$

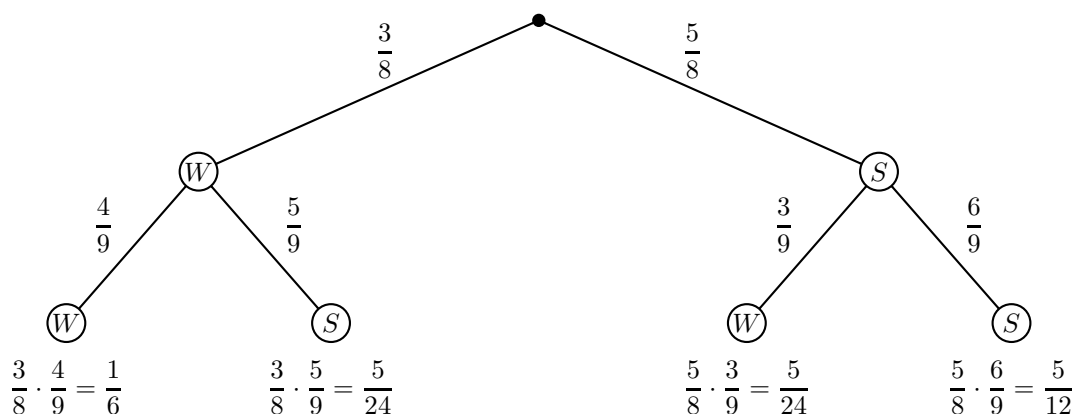
Und damit die gesuchte Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{-x-3}{e^x}$$

d) Für die gesuchte Fläche gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{z \rightarrow \infty} [F(z)]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{-x-3}{e^x} \right]_0^z \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{-z-3}{e^z} - \frac{-0-3}{e^0} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{-z-3}{e^z} + 3 \right] \\ &= 3 \end{aligned}$$

4. Baumdiagramm



- a) $P(WW) = \frac{1}{6}$
 b) $P(W, S) = P(WS) + P(SW) = \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{5}{12}$
 c) $P(SS) = \frac{5}{12}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

w_i	0	1	2
$P(W = w_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert:

$$E(W) = 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0.75$$

5. a) Binomialverteilung mit
- $n = 60$
- und
- $p = 0.03$

$$\begin{aligned}
 P_{60}(x \leq 2) &= \binom{60}{0} 0.03^0 \cdot 0.97^{60} + \binom{60}{1} 0.03^1 \cdot 0.97^{59} + \binom{60}{2} 0.03^2 \cdot 0.97^{58} \\
 &= 0.1608 + 0.2984 + 0.2723 \\
 &= 0.7315
 \end{aligned}$$

- b)
- n
- : Personen. Gegenwahrscheinlichkeit
- 0.97^n
- , dass keine der ersten
- n
- Personen das Symptom hat.

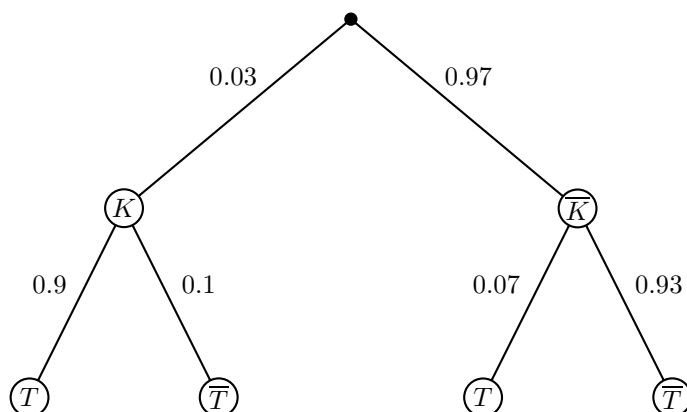
$$1 - 0.97^n > 0.99 \quad \Rightarrow \quad 0.97^n \leq 0.01$$

und da 0.97^n monoton fallend

$$n \geq \frac{\ln 0.01}{\ln 0.97} = 151.19$$

Es braucht also mindestens 152 Personen für das gesuchte Kriterium.

c) Baumdiagramm (T : Test zeigt an, \bar{T} : Test zeigt nicht an)



Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(K | T) = \frac{P(K \cap T)}{P(K \cap T) + P(\bar{K} \cap T)} = \frac{0.03 \cdot 0.9}{0.03 \cdot 0.9 + 0.97 \cdot 0.07} = 0.2845$$

6. a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$

Gerade durch P und $M(4/3)$:

$$a = \frac{15 - 3}{-2 - 4} = -2 \Rightarrow y = -2x + b \Rightarrow y = -2x + 11$$

Dies in die Kreisgleichung einsetzen:

$$x^2 + (-2x + 11)^2 - 8x - 6(-2x + 11) + 20 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0$$

Die letzte Gleichungen kann man noch durch 5 dividieren:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Eingesetzt in die Geradengleichung erhalten wir die Schnittpunkte:

$$P_1(5/1) \quad \text{und} \quad P_2(3/5)$$

Da der Punkt P links oberhalb des Kreismittelpunktes liegt, müssen wir auch den linken oberen Schnittpunkt als Lösung für den kürzesten Abstand wählen:

$$P_2(3/5)$$

b) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \, dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} \\ &= [-\pi \cdot (-1) + 0 - (-0 \cdot 1 + 0)] \\ &= \pi\end{aligned}$$

c) Setzt man die Reihe der Quadrate nach links fort, so hat das Quadrat Q_0 die Seitenlänge $\overline{AB} = \frac{5}{4}$. Somit ist das Seitenverhältnis $s_1 : s_0 = 4 : 5$ und damit das Flächenverhältnis $q = \frac{16}{25}$. Für die Summe der Quadratflächen erhalten wir dann:

$$s = F_{Q_1} \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}$$