

Kantonsschule Reussbühl Luzern

Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1 (8 Punkte)

$$xy' + 2y = \sin x \quad (x \neq 0)$$

a) $y' := k = \text{konstant}$ $2y = -kx + \sin x$

$$y = -\frac{k}{2}x + \frac{\sin x}{2}$$

für $y':=0$: $y = \frac{\sin x}{2}$

b) Homogene DGL: $y' = -2\frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| + \ln C^* = -2\ln |x|, \text{ also } |C^*y| = |x^{-2}|$$

Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung $y = C \cdot x^{-2}$ ($C \in \mathbb{R}$)

c) Ansatz: $y_0 = C(x) \cdot x^{-2}$, damit $y_0' = C'(x) \cdot x^{-2} - 2C(x) \cdot x^{-3}$

eingesetzt in inhomogene DGL: $C'(x) \cdot x^{-1} - 2C(x) \cdot x^{-2} + 2C(x) \cdot x^{-2} = \sin x$

Also ist $C'(x) = x \sin x$

Integration mit TI Voyage (bzw. partielle Integration) liefert $C(x) = \sin x - x \cos x$

Daher ist $y_0 = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$

d) Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung $y = \frac{C + \sin x - x \cos x}{x^2}$ ($C \in \mathbb{R}$)

e) Punkt $P(\pi|0) \in \text{Graph } G_f$: $0 = C + 0 - \pi(-1)$, also $C = -\pi$

$$y = f(x) = \frac{-\pi + \sin x - x \cos x}{x^2}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

$$w = f(z) = \frac{2z - i}{z - i}$$

a) Definitionsmenge $D = \mathbb{C} \setminus \{i\}$

für f^{-1} : $z = \frac{w - i}{2 - w}$
 $z(w - 2) = -i + iw$

$$z = \frac{i(w-1)}{w-2}, \text{ also ist die Wertemenge } W = \mathbb{C} \setminus \{2\}$$

b) $g: z = \bar{z}, g' = f(g)$

$$\frac{i(w-1)}{w-2} = \frac{-i(\bar{w}-1)}{\bar{w}-2}$$

$$(w-1)(\bar{w}-2) = (w-2)(1-\bar{w})$$

$$2w\bar{w} - 3w - 3\bar{w} + 4 = 0$$

$$(w-1.5)(\bar{w}-1.5) = 0.25$$

$$g': |w-1.5| = 0.5$$

Schreibweise: $A(x+iy)$ bedeutet Punkt $A(x|y)$.

g' ist also Kreis mit Mittelpunkt $M(1.5)$ und Radius 0.5 .

c) $h': |w-1| = 1, f^{-1}(h') = h$

$$h': (w-1)(\bar{w}-1) = 1$$

Also gilt für h :

$$\left(\frac{2z-i}{z-i} - 1\right) \left(\frac{2\bar{z}+i}{\bar{z}+i} - 1\right) = 1$$

$$\frac{2z-i}{z-i} \cdot \frac{2\bar{z}+i}{\bar{z}+i} - \frac{2z-i}{z-i} - \frac{2\bar{z}+i}{\bar{z}+i} = 0$$

$$4z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 1 - 2z\bar{z} + i\bar{z} - 2iz - 1 - 2z\bar{z} + 2i\bar{z} - iz - 1 = 0$$

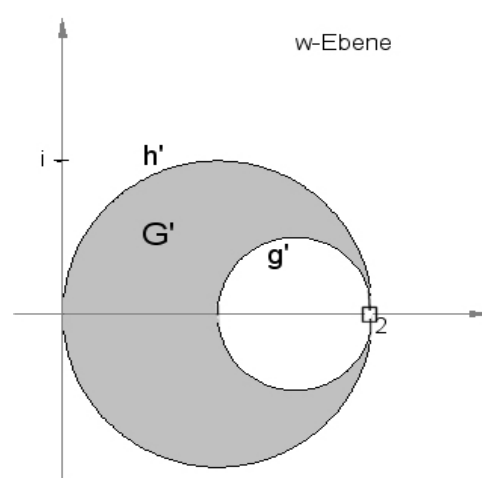
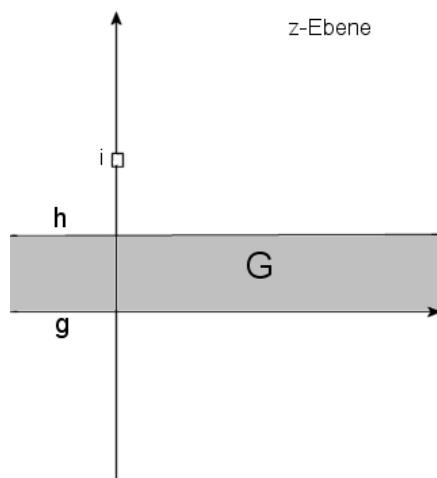
$$h: -iz + i\bar{z} - 1 = 0, \text{ bzw. } \underline{h: y = 0.5}, \text{ also ist } h \text{ die Parallele zur reellen Achse durch } P(0.5i).$$

Einfachere Lösungsvariante: $\left|\frac{2z-i}{z-i} - 1\right| = 1, \text{ also } \left|\frac{2z-i-z+i}{z-i}\right| = 1$

Daher gilt für $h: |z| = |z-i|$

Also ist h Mittelsenkrechte von $O(0)$ und $B(i)$

d)



Aufgabe 3 (8 Punkte)

a) Abbildungsdeterminante $\Delta = -a - 4 := 0$. Für $a = -4$ ist f_a also keine Affinität.

b) Da $\begin{pmatrix} a-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, so muss $a = -1$ sein.

Die Abbildungsgleichungen lauten also: $x' = -x + 2y$ und $y' = 2x - y$

Affinitätsrichtung $r \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und Affinitätsachse $s: x - y = 0$, bzw. $s: y = x$

Für den Normalenvektor \vec{n}_s von s gilt $\vec{n}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel r$. Also ist f_{-1} normale Affinität.

c) f^{-1} : Aus $x' + 2y' = 3x$ und $2x' + y' = 3y$ folgt $x = \frac{x' + 2y'}{3}$ und $y = \frac{2x' + y'}{3}$

d) Da $S(1|0)$ und $Q(2|2) \in$ Parabel p , so ist p nach rechts geöffnet.

Ansatz: $y^2 = 2p(x - 1)$ mit Parameter $p > 0$

$Q \in$ Parabel p : $4 = 2p \cdot 1$, also $p = 2$.

Parabel p : $y^2 = 4(x - 1)$

e) x und y aus c) einsetzen in Parabelgleichung bei d):

$$\frac{1}{9} (2x' + y')^2 = \frac{4}{3} (x' + 2y' - 3)$$

$$\underline{4x'^2 + 4x'y' + y'^2 = 12x' + 24y' - 36}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Nullhypothese $H_0: p = 0.28$

Behauptung $H_1: p > 0.28$

Rechtsseitiger Test mit Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$.

Stichprobenumfang $n = 500$

$\mu = np = 140$, $\sigma^2 = np(1-p) \approx 100.8$, $\sigma \approx 10.04$

Approximation mit $X(\mu, \sigma)$ -Normalverteilung:

Zuerst $U(0, 1)$ -Normalverteilung:

$$\text{Aus } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.5 - \alpha = 0.45 \text{ folgt mit TI Voyage } u \approx 1.6449$$

Verbesserte Näherungsformel: $u = \frac{x - \mu - 0.5}{\sigma}$, also $x = \mu + \sigma u + 0.5 \approx 157.01$

Verwerfungsbereich gemäss Approximation $V = [158, 500]$, eventuell $V = [157, 500]$.

Kontrolle mit Binomialverteilung:

Mit Vorteil über Gegenwahrscheinlichkeit, da Zeitbedarf des TI Voyage sonst relativ gross:

$$\sum_{x=0}^{157} \binom{500}{x} 0.28^x 0.72^{500-x} \approx \underline{0.9581} \qquad \sum_{x=0}^{156} \binom{500}{x} 0.28^x 0.72^{500-x} \approx 0.9487$$

Also ist der Verwerfungsbereich $V = [158, 500]$ mit Fehler 1. Art $\approx 4.2\%$

Da die Testgrösse $t = 156 \notin V$, so ist die Abweichung nicht signifikant.

Aufgabe 5: Gravitation (8 Punkte)

- a) Bahnradius: $r_1 = 550\text{km} + 6370\text{km} = 6.92 \cdot 10^6\text{m}$; Erdmasse: $m_E = 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}$

Zentripetalkraft = Gravitationskraft

$$\frac{m \cdot v^2}{r_1} = G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_1^2} \rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_E}{r_1}} = 7590 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) $T_1 = \frac{2\pi \cdot r_1}{v} = 5730\text{s} = 1\text{h } 35.5\text{min}$

- c) Grosse Bahnhalbachsen:

$$a_1 = 2 \cdot 6370\text{km} + 2 \cdot 550\text{km} = 1.384 \cdot 10^7\text{m}$$

$$a_2 = 2 \cdot 6370\text{km} + 550\text{km} + 1850\text{km} = 1.514 \cdot 10^7\text{m}$$

$$\text{Kepler III: } \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{a_2^3}{a_1^3}} \cdot T_1 = 6560\text{s} = 1\text{h } 49.3\text{min}$$

- d) Abstand zum Erdmittelpunkt im Apogäum: $r_A = 6370\text{km} + 1850\text{km} = 8.22 \cdot 10^6\text{m}$
Abstand zum Erdmittelpunkt im Perigäum: $r_P = 6370\text{km} + 550\text{km} = 6.92 \cdot 10^6\text{m}$

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{m \cdot v_A^2}{2} - G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_A} = \frac{m \cdot v_P^2}{2} - G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_P} \quad (\text{E})$$

$$\text{Kepler II (Drehimpuls): } v_A \cdot r_A = v_P \cdot r_P \quad (\text{K})$$

$$(\text{K}) \rightarrow v_A = \frac{r_P}{r_A} \cdot v_P \text{ in (E) eingesetzt: } \frac{r_P^2}{r_A^2} \cdot \frac{m \cdot v_P^2}{2} - G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_A} = \frac{m \cdot v_P^2}{2} - G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_P}$$

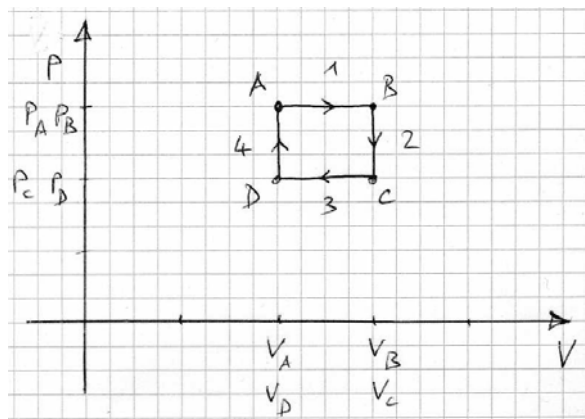
$$\rightarrow \left(\frac{r_P^2}{r_A^2} - 1 \right) \cdot v_P^2 = 2 \cdot G \cdot m_E \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P} \right) \rightarrow \frac{r_P^2 - r_A^2}{r_A^2} \cdot v_P^2 = \frac{2 \cdot G \cdot m_E \cdot (r_P - r_A)}{r_A \cdot r_P}$$

$$\rightarrow v_P^2 = \frac{2 \cdot G \cdot m_E \cdot (r_P - r_A)}{r_A \cdot r_P} \cdot \frac{r_A^2}{r_P^2 - r_A^2} \rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_E \cdot r_A}{(r_A + r_P) \cdot r_P}} = 7910 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_A = \frac{r_P}{r_A} \cdot v_P = 6660 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 6: Wärmelehre (8 Punkte)

- a)



- b) isobar: $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$

$$\rightarrow T_B = \frac{V_B}{V_A} \cdot T_A = 675\text{K};$$

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D} \text{ bzw. } \frac{V_B}{T_A} = \frac{V_A}{T_D} \rightarrow T_D = \frac{V_A}{V_B} \cdot T_A = 300\text{K}$$

$$c) \text{ Druck in C, D: } \frac{p_C}{T_C} = \frac{p_B}{T_B} \rightarrow p_C = p_D = \frac{T_C}{T_B} \cdot p_B = 400'000 \text{ Pa}$$

pro Arbeitstakt:

$$\text{Arbeit: } W_1 = -p_A \cdot (V_B - V_A) = -60 \text{ J}; \quad W_3 = -p_C \cdot (V_A - V_B) = 40 \text{ J}$$

$$\rightarrow W = W_1 + W_3 = -20 \text{ J}$$

$$\text{zugeführte Wärme: } Q_1 = C_p \cdot n \cdot (T_B - T_A) = 210 \text{ J}; \quad Q_4 = C_V \cdot n \cdot (T_A - T_D) = 99.8 \text{ J}$$

$$\rightarrow Q = Q_1 + Q_4 = 309.8 \text{ J}$$

$$\text{Stickstoff: } C_p = 29.1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}; \quad C_V = C_p - R = 20.8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$\rightarrow \text{Wirkungsgrad: } \eta = \frac{|W|}{Q} = 0.0647 = 6.47\%$$

Aufgabe 7: Induktion (6 Punkte)

$$d = 0.038 \text{ m}; \quad A = 3.2 \text{ cm}^2 = 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2; \quad N = 420; \quad R_{Sp} = 1.2 \Omega$$

$$a) \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi \cdot d} \cdot I = 1.05 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \quad \Phi = B \cdot A = 3.37 \cdot 10^{-8} \text{ Vs}$$

$$U_{ind} = N \cdot \frac{\Phi}{\Delta t} = 7.07 \cdot 10^{-5} \text{ V}; \quad I = \frac{U_{ind}}{R + R_{Sp}} = 1.20 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

b) Lenz'sche Regel: Ursache des Induktionsstromes = Zunahme des durch den Leiter erzeugten Magnetfeldes \rightarrow Magnetfeld der Spule ist dem Magnetfeld des Leiters entgegen gesetzt gerichtet (aus der Blattebene heraus) \rightarrow Richtung des Spulenstromes: im Gegenuhrzeigersinn.

c) Kein Strom, da sich der Fluss nicht ändert.

d) Durch bewegen der Spule (z.B. vom Leiter entfernen oder um eine in der Blattebene liegende Achse drehen).

Aufgabe 8: Differentialgleichungen, Wechselströme (8 Punkte)

Bemerkung: in den Zwischenrechnungen werden die Einheiten weggelassen.

$$a) \quad Z = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} = R + i \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = 25 - 22.5 \cdot i = 33.6 \cdot e^{-0.733 \cdot i}$$

$$|Z| = 33.6 \Omega; \quad \varphi = \arg(Z) = -0.733 \text{ rad} = -42^\circ$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|Z|} = 0.595 \text{ A}$$

$$b) \quad \tilde{I} = \frac{1}{Z} \cdot \tilde{U} = \frac{1}{Z} \cdot \hat{U} = 0.595 \cdot e^{0.733 \cdot i}$$

$$\tilde{U}_C = Z_C \cdot \tilde{I} = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \cdot \tilde{I} = -62.5 \cdot i \cdot 0.595 \cdot e^{0.733 \cdot i} = 37.2 \cdot e^{-0.838 \cdot i}$$

$$\rightarrow \hat{U}_C = 37.2 \text{ V}; \quad \varphi_C = -0.838 \text{ rad} = -48^\circ$$

c) Maschenregel: $U(t) = U_R + U_L + U_C = R \cdot I + L \cdot \dot{I} + U_C = R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} + U_C$

$$\text{mit } Q = C \cdot U_C: \quad U(t) = R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C$$

$$\rightarrow \text{DGL für } U_C(t): \ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C = \frac{\hat{U}}{L \cdot C} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

DGL der erzwungenen Schwingung mit:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} = 250'000 \text{s}^{-2}; \quad \delta = \frac{R}{2 \cdot L} = 125 \text{s}^{-1}; \quad A = \frac{\hat{U}}{L \cdot C} = 5 \cdot 10^6 \text{Vs}^{-2}$$

$$\hat{U}_C = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2}} = 37.2 \text{V}$$