

1. a) Für die Funktion gilt

$$f_a(x) = \frac{x^3 - ax^2 + 1}{2x^2} = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}x^{-2}; \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und damit für die Ableitung (mit Quotientenregel)

$$f'_a(x) = \frac{(3x^2 - 2ax) \cdot 2x^2 - (x^3 - ax^2 + 1) \cdot 4x}{4x^4} = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4}$$

oder (einfacher)

$$f'_a(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-2)x^{-3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3}$$

$f'_a$  ist unabhängig von  $a$ .

2. Ableitung

$$f''_a(x) = \frac{(8x^3 - 4) \cdot 4x^4 - (2x^4 - 4x) \cdot 16x^3}{16x^8} = \frac{48x^4}{16x^8} = \frac{3}{x^4}$$

oder

$$f''_a(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{2} - x^{-3}\right)' = 3x^{-4} = \frac{3}{x^4}$$

Es folgt für das Extremum:

$$f'_a(x) = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^4 - 4x = x(2x^3 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

(da  $x \notin \mathbb{D}$  muss nur der Klammerausdruck betrachtet werden).

oder

$$f'_a(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot x^3} \quad x^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_E = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

$x_E = \sqrt[3]{2}$  ist die einzige Lösung und von  $a$  unabhängig.

$x_E$  in die 2. Ableitung eingesetzt

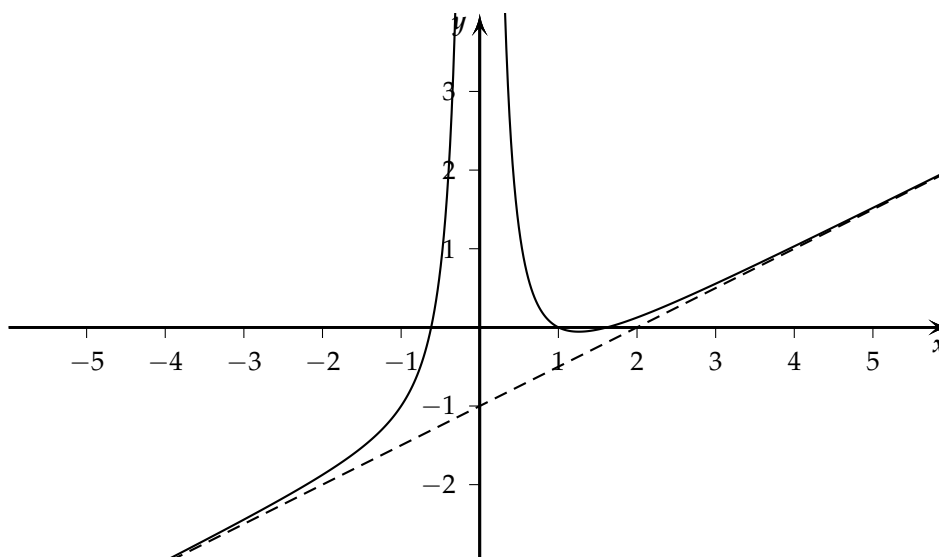
$$f''_a(x_E) = \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}} = 1.19 > 0$$

Das heisst, wir haben bei  $x_E = \sqrt[3]{2}$  ein lokales Minimum!

b) Für  $a = 2$  gilt

$$f_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x^2}; \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Skizze:



Nullstellen:

$$f_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

oder

$$\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x^2} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot 2x^2} \quad x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

$x = 1$  ist Nullstelle, da

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

Diese Nullstelle wird mittels Polynomdivision abgespalten:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 1) : (x - 1) = x^2 - x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 1} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{-x^2 + x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Die rechte Seite null gesetzt, ergibt die Lösungen

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Und damit

$$N_1(1/0); \quad N_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}/0\right) \approx N_2(1.618/0); \quad N_3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}/0\right) \approx N_3(-0.618/0)$$

### Extremalstellen:

Ableitungen (können an sich aus a) übernommen werden):

$$f_2'(x) = \frac{(3x^2 - 4x) \cdot 2x^2 - (x^3 - 2x^2 + 1) \cdot 4x}{4x^4} = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4}$$

$$f_2''(x) = \frac{(8x^3 - 4) \cdot 4x^4 - (2x^4 - 4x) \cdot 16x^3}{16x^8} = \frac{48x^4}{16x^8} = \frac{3}{x^4}$$

oder

$$f_2'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3}$$

$$f_2''(x) = \frac{3}{x^4}$$

Es folgt für das Extremum: (kann aus a) übernommen werden)

$$x_4 = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

Damit haben wir ein lokales Minimum mit dem Tiefpunkt:

$$T\left(\sqrt[3]{2}/f_2\left(\sqrt[3]{2}\right)\right) \approx T(1.26/-0.055)$$

### Wendestellen

Wendestellen gibt es keine, da  $f_2''(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{D}$ .

### Asymptoten:

$x_5 = 0$  ist eine Polstelle (keine Nullstelle des Zählers), d.h  $x = 0$  vertikale Asymptote.

Bei Annäherung von 0 von beiden Seiten streben die Funktionswerte gegen  $\infty$  und damit haben wir keinen Vorzeichenwechsel.

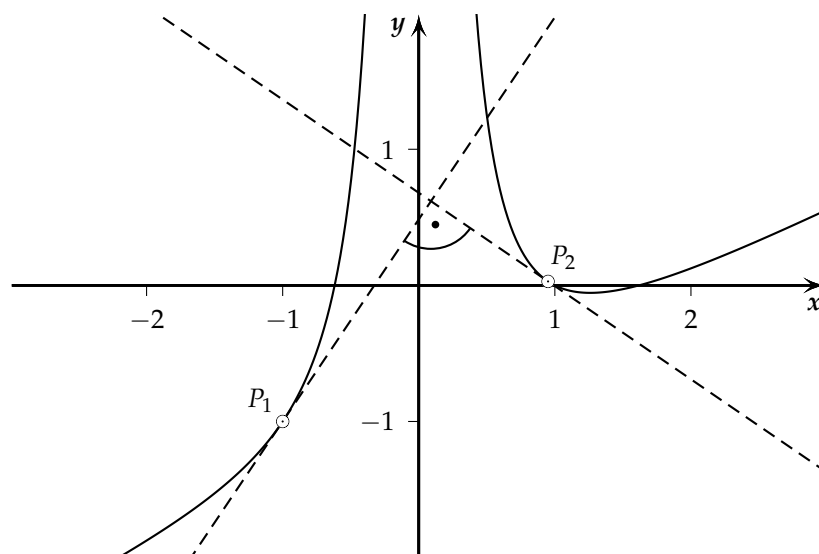
Für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{2}x - 1$$

Wir haben eine schiefe Asymptote

$$g : y = \frac{1}{2}x - 1$$

c) Skizze



Es folgt

$$f_2'(x) = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4} \Rightarrow f_2'(-1) = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2}$$

oder

$$f_2'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} \Rightarrow f_2'(-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

und damit

$$m_{t_1} \cdot m_{t_2} = -1 \Rightarrow m_{t_2} = -\frac{2}{3}$$

Bestimmung der Berührungsstelle

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -\frac{2}{3} \\ \frac{2x^4 - 4x}{4x^4} &= -\frac{2}{3} \\ 6x^4 - 12x &= -8x^4 \end{aligned}$$

$$x(14x^3 - 12) = 0$$

und damit

$$14x^3 - 12 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{6}{7}} \approx 0.95$$

oder

$$f_2'(x) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{6}{7}} \approx 0.95$$

Damit berührt die Tangente  $t_2$  den Graphen von  $f_2(x)$  an der Stelle  $x = \sqrt[3]{\frac{6}{7}}$  und damit im Punkt

$$P_2 \left( \sqrt[3]{\frac{6}{7}} / f_2 \left( \sqrt[3]{\frac{6}{7}} \right) \right) \approx P_2 (0.95 / -0.029)$$

$$2. P_{(\text{Kunde nicht da})} = 0.07; \quad P_{(\text{Kunde da})} = 0.93$$

$$a) \quad \text{i. } P_{(\text{alle da von 8})} = (0.93)^8 = 0.56$$

$$\text{ii. } P_{(3 \text{ von 8 nicht da})} = \binom{8}{3} (0.07)^3 \cdot (0.93)^5 = 0.013$$

$$\text{iii. } P_{(\text{höchst. 6 von 8 da})} = 1 - (0.93)^8 - (0.93)^7 \cdot 0.07 \cdot 8 = 0.103$$

$$b) P_{(\text{nicht alle da})} = 1 - P_{(\text{alle da})} = 1 - 0.56 = 0.44$$

$$P_{(2 \text{ von 8 nicht da})} = \binom{8}{2} (0.07)^2 \cdot (0.93)^6 = 0.089$$

$$P_{(2 \text{ nicht da/nicht alle da})} = \frac{0.089}{0.44} = 0.202$$

c)  $p = 0.93$ ,  $q = 0.07$ ,  $n = 8$ . Da Binomialverteilung gilt:

$$E(X) = pn = 0.93 \cdot 8 = 7.44$$

oder mit konkreter Berechnung aller W'keiten:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	$5.76 \cdot 10^{-10}$	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$2.85 \cdot 10^{-6}$	$7.57 \cdot 10^{-5}$	0.0013	0.0134	0.089	0.34	0.56

und damit

$$E(X) = 0 \cdot 5.76 \cdot 10^{-10} + \dots + 8 \cdot 0.56 = 7.44$$

d)  $8! = 40'320$  Möglichkeiten;

Alphabetische Reihenfolge entspricht genau einer der oben erwähnten Möglichkeiten:

$$P_{(\text{alph. Reihenfolge})} = \frac{1}{40\,320} = 0.000\,024\,8$$

$$e) P_{(\text{mind. 1 Kunde von } n \text{ nicht anwesend})} = 1 - P_{(\text{alle da von } n)} = 1 - 0.93^n$$

$$1 - (0.93)^n > 0.75$$

$$0.25 > (0.93)^n$$

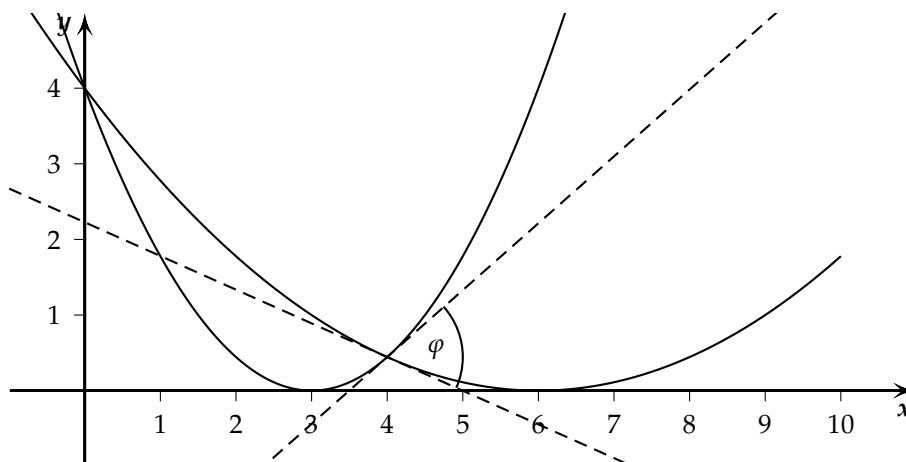
$$\ln 0.25 > n \ln 0.93$$

$$\frac{\ln 0.25}{\ln 0.93} < n$$

$$19.1 < n$$

Er müsste mindestens 20 Kunden besuchen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kunde nicht anwesend ist, grösser als 75% ist.

3. a) Skizze



Gegeben sind die beiden Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{9}(x^2 - 12x + 36); \quad f_2(x) = \frac{1}{9}(4x^2 - 24x + 36)$$

Schnittstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ \frac{1}{9}(x^2 - 12x + 36) &= \frac{1}{9}(4x^2 - 24x + 36) \\ 0 &= 3x^2 - 12x \\ 0 &= 3x(x - 4) \end{aligned}$$

und damit

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4$$

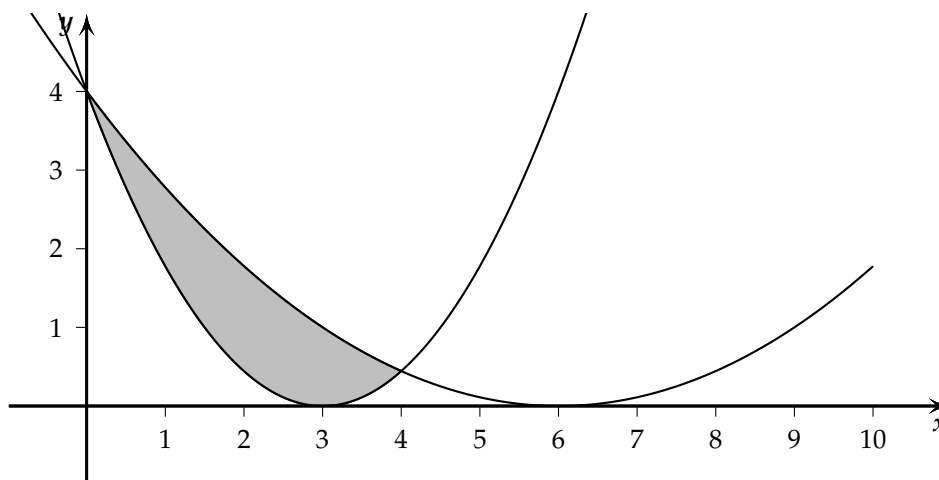
Ableitungen:

$$f_1'(x) = \frac{1}{9}(2x - 12); \quad f_2'(x) = \frac{1}{9}(8x - 24)$$

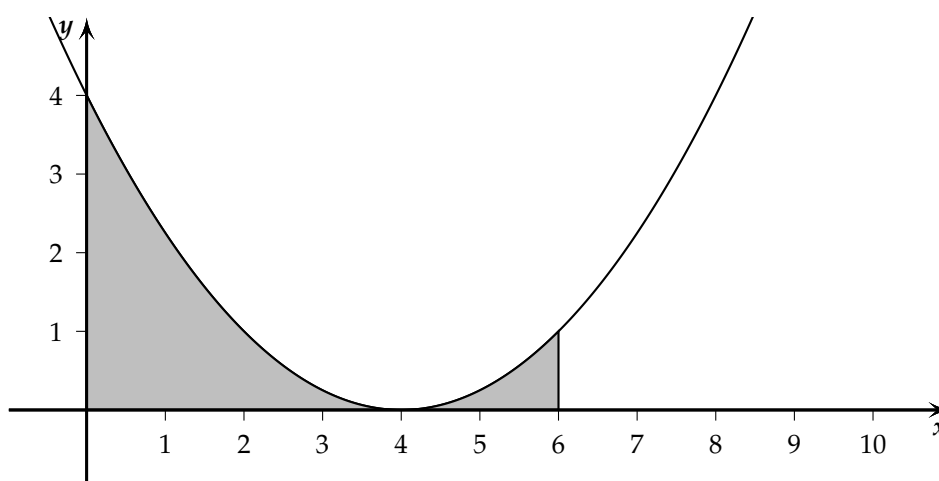
Für den Winkel an der Schnittstelle  $x = 4$  gilt dann mit  $f_1'(4) = -\frac{4}{9}$  und  $f_2'(4) = \frac{8}{9}$ 

$$\tan \varphi = \left| \frac{f_1'(4) - f_2'(4)}{1 + f_1'(4) \cdot f_2'(4)} \right| = \frac{108}{49} \Rightarrow \varphi \approx 65.560^\circ$$

b) Skizze

Schnittstellen aus a):  $x = 0$  und  $x = 4$  sind Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^4 (f_1(x) - f_2(x)) \, dx = \frac{1}{9} \int_0^4 (-3x^2 + 12x) \, dx \\
 &= \frac{1}{9} [-x^3 + 6x^2]_0^4 \\
 &= \frac{1}{9} [-4^3 + 6 \cdot 4^2] = \frac{32}{9}
 \end{aligned}$$

c) Skizze (für  $k = 1.5$ )



**Bemerkung:**

Für  $k \leq 1$  besteht die Fläche aus einem einfachen Flächenstück, für  $k > 1$  aus zwei Teilflächen (wie Skizze oben mit  $k = 1.5$ ). Auch im letzteren Fall kann einfach durchintegriert werden.

Es gilt

$$F(k) = \frac{1}{9} \int_0^6 (k^2 x^2 - 12kx + 36) dx = \left[ \frac{k^2 x^3}{27} - \frac{2kx^2}{3} + 4x \right]_0^6 = 8k^2 - 24k + 24$$

Die Ableitung null setzen

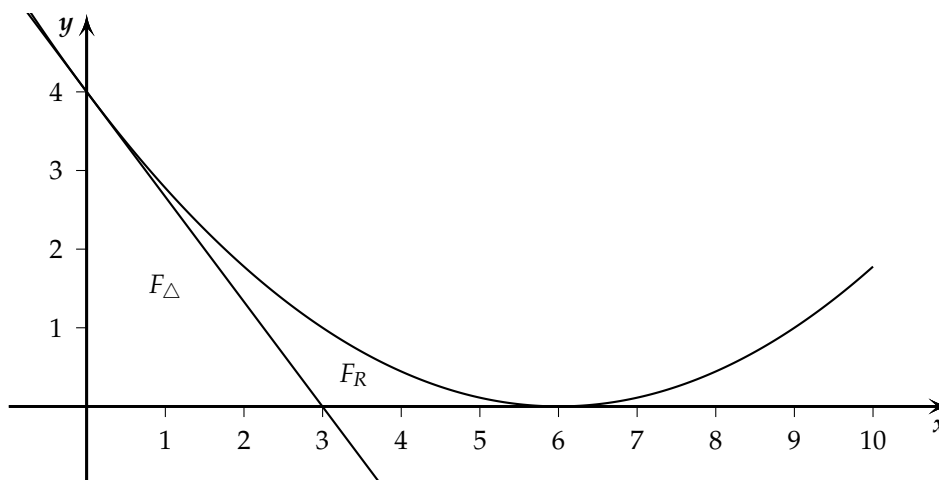
$$(8k^2 - 24k + 24)' = 0 \Rightarrow 16k - 24 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Wegen

$$F''(k) = 16 > 0$$

haben wir ein Minimum.

d) Skizze



Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{9}(k^2 x^2 - 12kx + 36) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{9}(2k^2 x - 12k)$$

Damit erhalten wir für die Steigung

$$f'(0) = \frac{1}{9}(2k^2 \cdot 0 - 12k) = -\frac{12}{9}k = -\frac{4}{3}k$$

und der  $y$ -Achsenabschnitt ist  $f(0) = 4$ :

$$t(x) = -\frac{4}{3}kx + 4$$

Nullstelle der Tangente

$$-\frac{4}{3}kx + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{3}{k}$$

Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks bestehen aus den Intervalle  $[0, b]$  und  $[0, x_S]$ .  
Die Fläche des Dreiecks ist dann (da  $b, x_S > 0$ )

$$F_{\Delta} = \frac{bx_S}{2} = \frac{4 \cdot \frac{3}{k}}{2} = \frac{6}{k}$$

Nullstelle der Funktion  $f_k$

$$kx - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{k}$$

Für die Fläche zwischen den Koordinatenachsen und dem Graphen gilt dann:

$$F = \frac{1}{9} \int_0^{\frac{6}{k}} (k^2 x^2 - 12kx + 36) \, dx = \left[ \frac{k^2 x^3}{27} - \frac{2kx^2}{3} + 4x \right]_0^{\frac{6}{k}} = \frac{8}{k}$$

Die Restfläche ist dann

$$F_R = F - F_{\Delta} = \frac{8}{k} - \frac{6}{k} = \frac{2}{k}$$

und somit das Verhältnis

$$F_{\Delta} : F_R = \frac{6}{k} : \frac{2}{k} = 3 : 1$$

$$4. \text{ a) } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = 5 \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 5\sqrt{5} \approx 11.18$$

b)  $D(1 + 3t/2 + 2t/2 - t) \in g$ . Damit gilt für  $\vec{BD}$

$$\vec{BD} = \vec{OD} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 2 + 2t \\ 2 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 3t \\ 1 + 2t \\ 6 - t \end{pmatrix}$$

Wegen  $\vec{AB} \perp \vec{BD}$  gilt  $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 + 3t \\ 1 + 2t \\ 6 - t \end{pmatrix} = -40 + 30t - 30 + 5t = -70 + 35t = 0 \Rightarrow t = 2$$

Und damit

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(7/6/0)$$

c)  $E = (ABC)$ : Parametergleichung

$$\vec{r} = \vec{OA} + u\vec{AB} + v\vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das ergibt das zugehörige Gleichungssystem der Komponentengleichungen:

$$\begin{cases} x = -5 + 10u + 12v \\ y = 1 + 5v \\ z = 1 - 5u - v \end{cases}$$

Elimination von  $u$  und  $v$ :

$$\begin{array}{l} \text{I} \left| \begin{array}{l} x = -5 + 10u + 12v \\ y = 1 + 5v \\ z = 1 - 5u - v \end{array} \right. \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \xrightarrow[\text{II}]{\text{I}+2\text{III}} \begin{array}{l} \text{IV} \left| \begin{array}{l} x + 2z = -3 + 10v \\ y = 1 + 5v \end{array} \right. \\ \text{V} \end{array} \xrightarrow{\text{IV}-2\text{V}} x - 2y + 2z = -5$$

Und damit

$$E : x - 2y + 2z + 5 = 0$$

d) Der Normalenvektor der Ebene  $E$  ist  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Parametergleichung der Geraden  $h$  durch  $B$  senkrecht auf Ebene  $E$ :

$$h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S$  liegt auf  $h$ :

$$\vec{BS} = \vec{OS} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und hat von  $B$  Abstand 9

$$|\vec{BS}| = 9 \Rightarrow \left| t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 81 \Rightarrow 9t^2 = 81 \Rightarrow t = \pm 3$$

Diese Werte in die Parametergleichung eingesetzt, liefert für  $t = 3$

$$\vec{OS}_1 = \vec{OB} + 3\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(8/-5/2)$$

und für  $t = -3$

$$\vec{OS}_2 = \vec{OB} - 3\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(2/7/-10)$$

Einfacher: Berechnet man  $|\vec{n}| = 3$  und mit  $\overline{BS} = 9$  erhält man die Gleichungen oben direkt.

e) Da  $A$  und  $B$  in der Ebene liegen und  $BS \perp E$ , haben wir ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt

$$\tan \gamma = \frac{\overline{BS}}{\overline{AB}} = \frac{9}{5\sqrt{5}} \approx 0.805 \Rightarrow \gamma \approx 38.38^\circ$$

Der Winkel ist für beide Punkte  $S_1$  und  $S_2$  aus d) gleich.

5. a) Mittelpunkt  $M$  von  $k$ :

$$x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 - 9 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 25$$

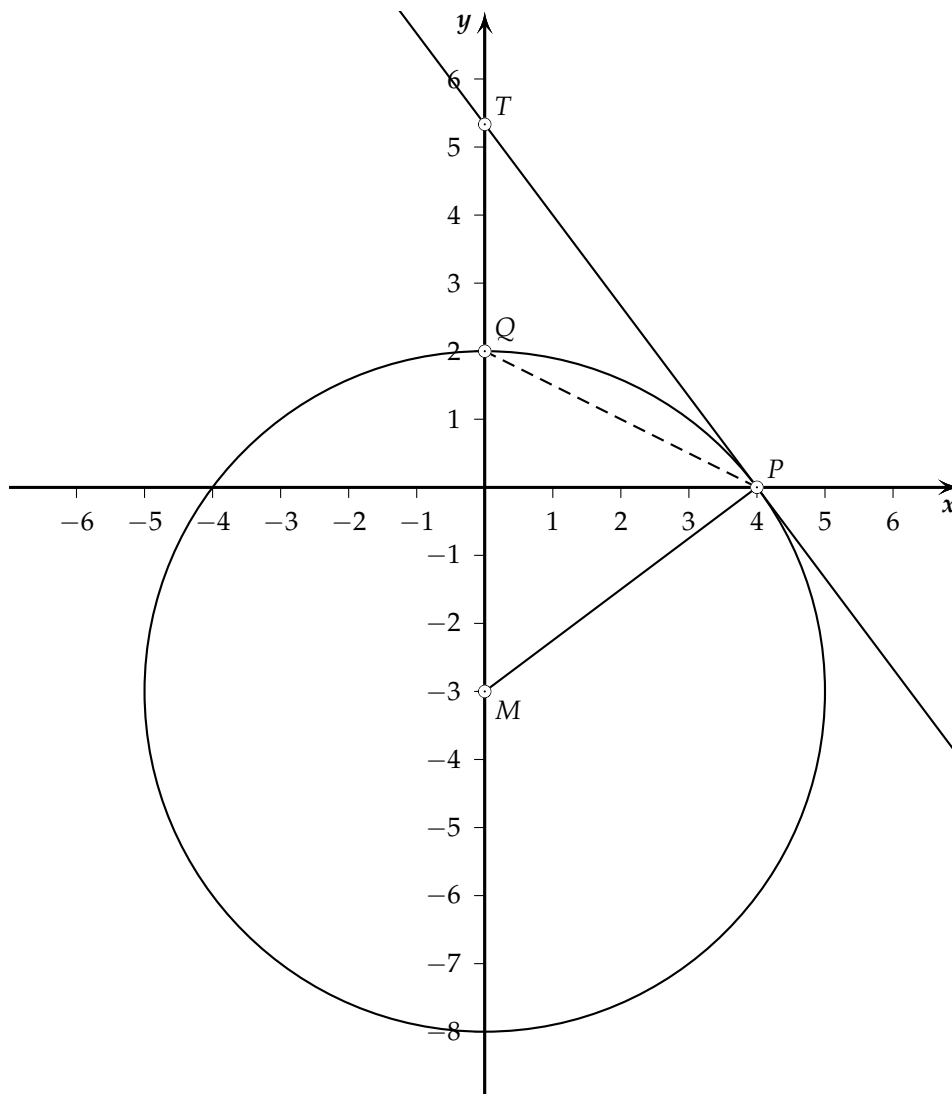
Damit  $M(0/-3)$ .

Punkt  $P \in k$  und  $y_P = 0$  (wegen  $x_P > 0$  nur positive Lösung)

$$\Rightarrow x_P^2 - 16 = 0 \Rightarrow x_P = 4 \Rightarrow P(4/0)$$

Punkt  $Q \in k$  und  $x_Q = 0$  (wegen  $y_Q > 0$  nur positive Lösung)

$$(y_Q + 3)^2 = 25 \Rightarrow y_Q + 3 = \pm 5 \Rightarrow y_Q = 2 \Rightarrow Q(0/2)$$



Tangente  $t$ :

$$m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{0 - (-3)}{4 - 0} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_{MP}} = -\frac{4}{3}$$

In  $t : y = -\frac{4}{3}x + b$  die Koordinaten von  $P$  eingesetzt

$$0 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + b \Rightarrow b = \frac{16}{3}$$

und damit

$$T \left( 0 / \frac{16}{3} \right)$$

b) Für alle Aufgaben gibt es  $\binom{3}{1}$  Möglichkeiten für den Torhüter und  $\binom{6}{2}$  Möglichkeiten für die Verteidiger.

i.  $\binom{12}{3}$  Möglichkeiten für die Stürmer

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{12}{3} = 9'900 \text{ Möglichkeiten}$$

ii.  $\binom{11}{2}$  Möglichkeiten für die Stürmer (Paul ist gesetzt, also noch 2 von den anderen)

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{11}{2} = 2'475 \text{ Aufstellungen}$$

iii.  $\binom{11}{3}$  Möglichkeiten für die Stürmer (Paul fehlt, also noch 3 von den anderen)

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{11}{3} = 7'425 \text{ Aufstellungen}$$

c) Substitution:  $u = e^x$

$$u^2 - au + 4 = 0$$

Für *genau* eine Lösung, muss die Diskriminante 0 sein:

$$D = a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = \pm 4$$

Für  $a = 4$  erhalten wir

$$u^2 - 4u + 4 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

Für  $a = -4$  erhalten wir

$$u^2 + 4u + 4 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = -2 \Rightarrow e^x = -2 \Rightarrow \text{keine reelle Lsg.}$$